文章编号：1674-8085(2015)04-0001-06

一类有可换 Sylow 2-子群的 $8p^3$ 阶群的完全分类

*陈松良[1]，蒋启燕[2]，崔忠伟[1]

(1.贵州师范学院数学与计算机科学学院，贵州，贵阳 550018；2.贵州师范大学数学与计算机科学学院，贵州，贵阳 550001)

摘　要：设 p 为奇素数（$p\neq3$，7），G 是 Sylow 2-子群是型为$(2^2, 2)$的 8 阶交换群 $C_4\times C_2$ 的 $8p^3$ 阶群，利用群在群上的作用理论，对群 G 进行了完全分类并确定了它的全部构造，即：1)当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 74 个彼此不同构的类型；2)当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 40 个彼此不同构的类型。

关键词：有限群；同构分类；群的构造

中图分类号：O152.1　**文献标识码**：A　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2015.04.001

ON THE COMPLETE CLASSIFICATION OF A KIND OF THE FINITE GROUPS OF ORDER 8P^3 WITH ABELIAN Sylow 2-SUBGROUPS

*CHEN Song-liang[1], JIANG Qi-yan[2], Cui Zhong-wei[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal College, Guiyang, Guizhou 550018, China；

2. School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang, Guizhou 550001, China)

Abstract: Let p be an odd prime and G be groups of order $8p^3$ with Abelian Sylow 2-subgroup $C_4\times C_2$. Based on the theory of groups acting on groups, we discuss that the isomorphic classification of G. Their structures are completely determined. We also show that: 1) If $p\equiv1$ (mod 4), G has 74 nonisomorphic structures; 2) If $p\equiv3$ (mod 4), G has 40 nonisomorphic structures.

Key words: finite group; isomorphic classification; structure of group

设 p 是奇素数（$p\neq3$，7），文献[1]研究了 $8p^3$ 阶群的构造，但因证明过程复杂而冗长，所以没有给出证明过程。文献[2]讨论了 Sylow 2−子群为交换群的 $8p^3$ 阶群的构造，也没有给出具体的构造。我们注意到文献[1]与文献[2]的结论有些不一致，孰是孰非，值得澄清。本文应用群在群上的作用理论，确定了 Sylow 2−子群是型为$(2^2, 2)$的 8 阶交换群 $C_4\times C_2$ 的 $8p^3$ 阶群的全部构造，即证明下面的定理：

定理 1　如果 G 是 Sylow 2−子群是型为$(2^2, 2)$的 8 阶交换群 $C_4\times C_2$ 的 $8p^3$ 阶群，其中 p 是一个奇素数（$p\neq3$，7），那么：1)当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 74 个彼此不同构的类型；2) 当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 40 个彼此不同构的类型。

根据这个定理，可知文献[1]的结论是正确的，而文献[2]中定理 2 不正确(其中包含了一些同构的群的构造)。现在给出定理 1 的证明，由于证明过程较长，将分为 5 个引理来描述。在下文中，总假定 p 是奇素数（$p\neq3$，7），G 是 $8p^3$ 阶群，其 Sylow 2−子群是型为$(2^2, 2)$的 8 阶交换群 $C_4\times C_2$，记为 S。由Sylow 定理易知，G的 Sylow p−子群是正规子群，从而 G 是 P 与 S 的半直积。为叙述方便，用$|G|$，$|g|$分别表示群 G 和元素 g 的阶，且对元素 g，h，记 $g^h=h^{-1}gh$。由文献[2]知 p^3阶群有 5 种不同构的

收稿日期：2015-05-06；修改日期：2015-05-28

基金项目：贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字[2013]2234 号)，贵州省教育厅教改项目(黔教高发[2013]446 号)

作者简介：*陈松良(1964-)，男，湖南双峰人，教授，博士，主要从事有限群论及其应用研究(E-mail:chsl_2013@aliyun.com);

蒋启燕(1964-)，女，贵州遵义人，副教授，主要从事高等数学和代数学研究(E-mail:dq2008yi@163.com);

崔忠伟(1980-)，男，贵州铜仁人，副教授，博士生，主要从事算法与物联网研究(E-mail:seven_cui@126.com).

类型：循环群 $P_1=\langle a\rangle$，其中$|a|=p^3$；型为$(p^2,\ p)$的交换群 $P_2=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$，其中$|a|=p^2$，$|b|=p$；初等交换群 $P_3=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle$，其中$|a|=|b|=|c|=p$；指数是$p^2$的非交换群 $P_4=\langle a,\ b\rangle$，其中$|a|=p^2$，$|b|=p$，$a^b=a^{1+p}$；指数是 p 的非交换群 $P_5=\langle a,\ b,\ c\rangle$，其中$|a|=|b|=|c|=p$，$[a,\ b]=c$，$[a,\ c]=[b,\ c]=1$。设$\sigma$是$p^3$，$p^2$，$p$的一个公共原根，当$p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，记$s=\sigma^{\frac{p^2(p-1)}{4}}$。设$S=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$，其中$|x|=4$，$|y|=2$。

引理 1 设p是奇素数（$p\neq3$，7），G的Sylow 2-子群为S而Sylow p-子群为循环群P_1，那么：

1)当$p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$恰有“4”个彼此不同构的类型；

2)当$p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$恰有 3 个彼此不同构的类型。

证明：因为P_1的自同构群$\mathrm{Aut}(P_1)$是阶为$p^2(p-1)$的循环群，而$S/C_S(P_1)$同构于$\mathrm{Aut}(P_1)$的一个子群，所以当$p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$有如下构造：

1)如果$C_S(P_1)=S$，则G是P_1与S的直积；

2)如果$C_S(P_1)=\langle x\rangle$，那么$y$诱导$P_1$的一个 2 阶自同构，于是$G$有如下的构造：

$$G=\langle a,\ y\mid |a|=p^3,\quad |y|=2,\ a^y=a^{-1}\rangle\times\langle x\rangle \tag{1}$$

3)如果$C_A(P_1)=\langle x^2,\ y\rangle$，那么$x$诱导$P_1$的一个 2 阶自同构，于是$G$有如下的构造：

$$G=\langle a,\ x\mid |a|=p^3,\quad |x|=4,\ a^x=a^{-1}\rangle\times\langle y\rangle \tag{2}$$

4)如果$C_A(P_1)=\langle y\rangle$，那么$x$诱导$P_1$的一个 4 阶自同构，于是$G$有如下的构造：

$$G=\langle a,\ x\mid |a|=p^3,\quad |x|=4,\ a^x=a^s\rangle\times\langle y\rangle \tag{3}$$

易见，当$p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$没有构造(3)。综上可知，引理 1 成立。

引理 2 设p是奇素数($p\neq3,7$)，G的 Sylow 2-子群为 S而 Sylow p-子群为型为$(p^2,\ p)$的交换群P_2，那么：1)当$p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$恰有 19 个彼此不同构的类型；2)当$p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$恰有 10 个彼此不同构的类型。

证明：类似于文献[3]，易证得G是超可解群。再由文献[4]之定理 8.4.6，不妨设$\langle a\rangle$，$\langle b\rangle$都是S-不变的。由此得 $S/C_S(a)$，$S/C_S(b)$分别同构于$\mathrm{Aut}(\langle a\rangle)$与$\mathrm{Aut}(\langle b\rangle)$的某个子群，所以当$p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$有如下构造：

1)当$C_S(a)=C_S(b)=S$时，显然G是P_2与S的直积；

2)当$C_S(a)=S$，$C_S(b)=\langle x\rangle$时，G有如下构造：

$$G=\langle a\rangle\times\langle x\rangle\times\langle b,\ y\rangle,\ b^y=b^{-1} \tag{4}$$

3)当$C_S(a)=S$，$C_S(b)=\langle x^2,\ y\rangle$时，$G$有如下构造：

$$G=\langle a\rangle\times\langle y\rangle\times\langle b,\ x\rangle,\ b^x=b^{-1} \tag{5}$$

4)当$C_S(a)=S$，$C_S(b)=\langle y\rangle$时，G有如下构造：

$$G=\langle a\rangle\times\langle y\rangle\times\langle b,\ x\rangle,\ b^x=b^s \tag{6}$$

5)当$C_S(a)=\langle x\rangle$，$C_S(b)=S$时，G有如下构造：

$$G=\langle b\rangle\times\langle x\rangle\times\langle a,\ y\rangle,\ a^y=a^{-1} \tag{7}$$

6)当$C_S(a)=\langle x^2,\ y\rangle$，$C_S(b)=S$时，$G$有如下构造：

$$G=\langle b\rangle\times\langle y\rangle\times\langle a,\ x\rangle,\ a^x=a^{-1} \tag{8}$$

7)当$C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=S$时，G有如下构造：

$$G=\langle b\rangle\times\langle y\rangle\times\langle a,\ x\rangle,\ a^x=a^s \tag{9}$$

8)当$C_S(a)=\langle x\rangle$，$C_S(b)=\langle x\rangle$时，G有如下构造：

$$G=\langle a,\ b,\ y\rangle\times\langle x\rangle,\ [a,\ b]=1,\ a^y=a^{-1},\ b^y=b^{-1} \tag{10}$$

9)当$C_S(a)=\langle x\rangle$，$C_S(b)=\langle x^2,\ y\rangle$时，$G$有如下构造：

$$G=\langle a,\ y\rangle\times\langle b,\ x\rangle,\ a^y=a^{-1},\ b^x=b^{-1} \tag{11}$$

10)当$C_S(a)=\langle x^2,\ y\rangle$，$C_S(b)=\langle x\rangle$时，$G$有如下构造：

$$G=\langle a,\ x\rangle\times\langle b,\ y\rangle,\ a^x=a^{-1},\ b^y=b^{-1} \tag{12}$$

11)当$C_S(a)=\langle x^2,\ y\rangle$，$C_S(b)=\langle x^2,\ y\rangle$时，$G$有如下构造：

$$G=\langle a,\ b,\ x\rangle\times\langle y\rangle,\ [a,\ b]=1,\ a^x=a^{-1},\ b^x=b^{-1} \tag{13}$$

12)当$C_S(a)=\langle x\rangle$，$C_S(b)=\langle xy\rangle$时，G有如下构造：

$$G=\langle a,\ b,\ x,\ y\rangle,\ a^x=a,\ a^y=a^{-1},\ b^x=b^y=b^{-1} \tag{14}$$

13)当$C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=\langle x\rangle$时，G有如下构造：

$$G=\langle a,\ x\rangle\times\langle b,\ y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^y=b^{-1} \tag{15}$$

14)当$C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_A(b)=\langle x^2,\ y\rangle$时，$G$有如下构造：

$G=\langle a, b, x\rangle \times \langle y\rangle$, $[a, b]=1$, $a^x=a^s$, $b^x=b^{-1}$ (16)

15)当 $C_S(a)=\langle x\rangle$，$C_S(b)=\langle y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a, y\rangle \times \langle b, x\rangle$, $a^y=a^{-1}$, $b^x=b^s$ (17)

16)当 $C_S(a)=\langle x^2, y\rangle$，$C_S(b)=\langle y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a, b, x\rangle \times \langle y\rangle$, $[a, b]=1$, $a^x=a^{-1}$, $b^x=b^s$ (18)

17)当 $C_S(a)=C_S(b)=\langle y\rangle$ 时，G 有如下两种不同构造：

$G=\langle a, b, x\rangle \times \langle y\rangle$, $[a, b]=1$, $a^x=a^s$, $b^x=b^s$ 或 b^{-s} (19)

18)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=\langle x^2y\rangle$ 时，令 $a^x=a^s$，$b^x=b^s$，$b^y=b^{-1}$，则 G 有如下构造：

$G=\langle a, b, x, y\rangle$, $[a, b]=1$, $a^x=a^s$, $a^y=a$, $b^x=b^s$, $b^y=b^{-1}$ (20)

如果令 $a^x=a^s$，$b^x=b^{-s}$，$b^y=b^{-1}$，则所得 G 的构造与(20)是同构的(因为 $\langle x, y\rangle=\langle xy, y\rangle$，只要用 xy 代替 x 即知)。

易见，当 $p\equiv 3 \pmod 4$时，G 没有构造(6)，(9)，(15)~(20)。 综上所述，引理 2 成立。

引理 3 设 p 是奇素数($p\neq 3,7$)，G 的 Sylow 2−子群为 S 而 Sylow p−子群为 p^3 阶初等交换群 P_3，那么：1)当 $p\equiv 1 \pmod 4$时，G 恰有 34 个彼此不同构的类型；2)当 $p\equiv 3 \pmod 4$时，G 恰有 16 个彼此不同构的类型。

证明： 为简化记号，将 P_3 记为 P。显然 S 在 P 上的作用是互素的，于是由文献[4]之定理 8.4.2 得，$P=C_P(S)\times[P, S]$。首先，假定 $p\equiv 1 \pmod 4$，那么不难证明 G 一定是超可解的。

1)当 $C_P(S)=S$ 时，G 是 P_3 与 S 的直积；

2)当 $C_P(S)$是 p^2 阶子群时，不妨设 $C_P(S)=\langle a\rangle \times \langle b\rangle$，$[P, S]=\langle c\rangle$，则

2.1)当 $C_S(c)=\langle x\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle x\rangle \times \langle c, y\rangle$, $c^y=c^{-1}$ (21)

2.2)当 $C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle y\rangle\times\langle c,x\rangle$, $c^x=c^{-1}$ (22)

2.3)当 $C_S(c)=\langle y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle y\rangle \times \langle c, x\rangle$, $c^x=c^s$ (23)

3)当 $C_P(S)$是 p 阶子群时，不妨设 $C_P(S)=\langle a\rangle$，$[P, S]=\langle b\rangle \times \langle c\rangle$，且 $\langle b\rangle$ 与 $\langle c\rangle$ 都是 S-不变的。注意到 b，c 在 P 中是对称的，因此这时 G 有如下几种不同构的类型：

3.1)当 $C_S(b)=C_S(c)=\langle x\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle x\rangle \times \langle b, c, y\rangle$, $[b, c]=1$, $b^y=b^{-1}$, $c^y=c^{-1}$ (24)

3.2)当 $C_S(b)=C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle y\rangle \times \langle b, c, x\rangle$, $[b, c]=1$, $b^x=b^{-1}$, $c^x=c^{-1}$ (25)

3.3)当 $C_S(b)=\langle x\rangle$，$C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle b, y\rangle \times \langle c, x\rangle$, $b^y=b^{-1}$, $c^x=c^{-1}$ (26)

3.4)当 $C_S(b)=\langle x\rangle$，$C_S(c)=\langle xy\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle b, c, x, y\rangle$, $[b, c]=[x, y]=1$, $b^x=b$, $b^y=b^{-1}$, $c^x=c^y=c^{-1}$ (27)

3.5)当 $C_S(b)=\langle x\rangle$，$C_S(c)=\langle y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle b, y\rangle \times \langle c, x\rangle$, $b^y=b^{-1}$, $c^x=c^s$ (28)

3.6)当 $C_S(b)=\langle x^2, y\rangle$，$C_S(c)=\langle y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle y\rangle \times \langle b, c, x\rangle$, $[b, c]=1$, $b^x=b^{-1}$, $c^x=c^s$ (29)

3.7)当 $C_A(b)=C_A(c)=\langle y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle y\rangle \times \langle b, c, x\rangle$, $[b, c]=1$, $b^x=b^s$, $c^x=c^s$ 或 c^{-s} (30)

3.8)当 $C_S(b)=\langle y\rangle$，$C_S(c)=\langle x^2y\rangle$ 时，令 $b^x=b^s$，$c^x=c^s$，$c^y=b^{-1}$，则 G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle \times \langle b, c, x, y\rangle$, $b^x=b^s$, $b^y=b$, $c^x=c^s$, $c^y=c^{-1}$ (31)

如果令 $b^x=b^s$，$c^x=c^{-s}$，$c^y=b^{-1}$，则所得 G 的构造与(31)是同构的(因为 $\langle x, y\rangle=\langle xy, y\rangle$，只要用 xy 代替 x 即知)。

4)当 $C_P(S)=1$ 时，注意到 a，b，c 在 P 中是对称的，因此 G 有如下几种不同构的类型：

4.1)当 $C_S(a)=C_S(b)=C_S(c)=\langle x\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, y\rangle\times\langle x\rangle,\ a^y=a^{-1},\ b^y=b^{-1},\ c^y=c^{-1} \tag{32}$$

4.2)当 $C_S(a)=C_S(b)=C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=a^{-1},\ b^x=b^{-1},\ c^x=c^{-1} \tag{33}$$

4.3)当 $C_S(a)=\langle x\rangle$，$C_S(b)=C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, y\rangle\times\langle b, c, x\rangle,\ a^y=a^{-1},\ b^x=b^{-1},\ c^x=c^{-1} \tag{34}$$

4.4)当 $C_S(a)=C_S(b)=\langle x\rangle$，$C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, y\rangle\times\langle c, x\rangle,\ a^y=a^{-1},\ b^y=b^{-1},\ c^x=c^{-1} \tag{35}$$

4.5)当 $C_S(a)=C_S(b)=\langle x\rangle$，$C_S(c)=\langle xy\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, x, y\rangle,\ a^x=a,\ a^y=a^{-1},\ b^x=b,\ b^y=b^{-1},\ c^x=c^y=c^{-1} \tag{36}$$

4.6)当 $C_S(a)=\langle x\rangle$，$C_S(b)=\langle xy\rangle$，$C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, x, y\rangle,\ a^x=a,\ a^y=a^{-1},\ b^x=b^y=b^{-1},\ c^x=c^{-1},\ c^y=c \tag{37}$$

4.7)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=C_S(c)=\langle x\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, x\rangle\times\langle b, c, y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^y=b^{-1},\ c^y=c^{-1} \tag{38}$$

4.8)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^x=b^{-1},\ c^x=c^{-1} \tag{39}$$

4.9)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=\langle x\rangle$，$C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, c, x\rangle\times\langle b, y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^y=b^{-1},\ c^x=c^{-1} \tag{40}$$

4.10)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=\langle x\rangle$，$C_S(c)=\langle xy\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, x, y\rangle,\ a^x=a^s,\ a^y=a,\ b^x=b,\ b^y=b^{-1},\ c^x=c^y=c^{-1} \tag{41}$$

4.11)当 $C_S(a)=C_S(b)=\langle y\rangle$，$C_S(c)=\langle x\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, x\rangle\times\langle c, y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^x=b^s \text{ 或 } b^{-s},\ c^y=c^{-1} \tag{42}$$

4.12)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=\langle x^2y\rangle$，$C_S(c)=\langle x\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, x, y\rangle,\ a^x=a^s,\ a^y=a,\ b^x=b^s \text{ 或 } b^{-s},\ b^y=b^{-1},\ c^x=c,\ c^y=c^{-1} \tag{43}$$

4.13) 当 $C_S(a)=C_S(b)=\langle y\rangle$，$C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^x=b^s \text{ 或 } b^{-s},\ c^x=c^{-1} \tag{44}$$

4.14)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=\langle x^2y\rangle$，$C_S(c)=\langle x^2, y\rangle$ 时，令 $a^x=a^s$，$b^x=b^s$，$b^y=b^{-1}$，$c^x=c^{-1}$，则 G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, x, y\rangle,\ a^x=a^s,\ a^y=a,\ b^x=b^s,\ b^y=b^{-1},\ c^x=c^{-1},\ c^y=c \tag{45}$$

如果令 $a^x=a^s$，$b^x=b^{-s}$，$b^y=b^{-1}$，则所得 G 的构造与(45)是同构的(因为 $\langle x, y\rangle=\langle xy, y\rangle$，只要用 xy 代替 x 即知)。

4.15) 当 $C_S(a)=C_S(b)=C_S(c)=\langle y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$$G=\langle a, b, c, x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^x=b^s,\ c^x=c^s \text{ 或 } c^{-s} \tag{46}$$

4.16)当 $C_S(a)=C_S(b)=\langle y\rangle$，$C_S(c)=\langle x^2y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a, b, c, x, y\rangle$，$a^x=a^s$，$a^y=a$，$b^x=b^s$ 或 b^{-s}，$b^y=b$，$c^x=c^s$，$c^y=c^{-1}$

(47)

如果在(47)中令 $c^x=c^{-s}$，则所得 G 的构造与(47)是同构的(因为 $\langle x, y\rangle=\langle xy, y\rangle$，只要用 xy 代替 x 即知)。

综上可知，当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，Sylow 2−子群为 S 而 Sylow p−子群为 p^3 阶初等交换群的 $8p^3$ 阶群 G 共有 34 个彼此不同构的类型。

5)当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 没有构造(23)，(28) ～(31)，(38)～(47)，但 G 可以不是超可解的。当 G 不超可解时，x 的特征多项式 $f(\lambda)$不是 p 元域上的一次因式之积，但必是 λ^4-1 的因式，因而必是一个一次因式与一个二次不可约因式之积。又显然 y 正规化 P 的每个子群，于是 P 必是一个 p 阶 S-不变子群和一个 p^2 阶不可分解的 S-不变子群的直积。不妨设 $\langle a\rangle$ 是 S-不变子群而 $\langle b, c\rangle$ 是不可分解的 S-不变子群，x 作用在 $\langle b, c\rangle$ 上的特征多项式只能是 λ^2+1，再由文献[4]之定理 8.3.3 知 y 在 $\langle b, c\rangle$ 上的作用是平凡的。而 $C_S(a)$或为 S，或为 S 的 4 阶循环子群 $\langle x\rangle$，或为 S 的 4 阶初等交换子群 $\langle x^2, y\rangle$，因此当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 为非超可解的构造有下面 3 种不同构的类型：

5.1) 当 $C_S(a)=S$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a\rangle\times\langle y\rangle\times\langle b, c, x\rangle$，$[b, c]=1$，$b^x=c$，$c^x=b^{-1}$

(48)

5.2)当 $C_S(a)=\langle x\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a, y\rangle\times\langle b, c, x\rangle$，$[b, c]=1$，$a^y=a^{-1}$，$b^x=c$，$c^x=b^{-1}$

(49)

5.3)当 $C_S(a)=\langle x^2, y\rangle$ 时，G 有如下构造：

$G=\langle a, b, c, x\rangle\times\langle y\rangle$，$a^x=a^{-1}$，$b^x=c$，$c^x=b^{-1}$

(50)

总之，当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 16 个彼此不同构的类型。

综上所述，引理 3 成立。

引理 4 设 p 是奇素数（$p\neq3$，7），G 的 Sylow 2−子群为 S 而 Sylow p−子群为指数是 p^2 的 p^3 阶非交换群 P_4，那么：1)当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 4 个彼此不同构的类型；2)当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 3 个彼此不同构的类型。

证明：因为 P_4 的中心 $C(P_4)=\langle a^p\rangle$ 是 p 阶群，而 $C(P_4)$ char P_4，$P_4\lhd G$，于是 $C(P_4)\lhd G$。又不难证明 $\langle a^p, b\rangle$ 是 P_4 的唯一的 p^2 阶初等交换子群，从而它是 P_4 的特征子群，于是它又必是 G 的正规子群。由此可见，G 必是超可解群。类似于文献[3]，由文献[4]之定理 8.4.6 知，可设 $\langle a\rangle$，$\langle b\rangle$ 都是 S−不变的。所以当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 有下列构造：

1)当 $C_S(a)=C_S(b)=S$ 时，显然 G 是 P_4 与 S 的直积。

2)当 $C_S(a)=\langle x\rangle$ 时，必有 $a^y=a^{-1}$。将 y 作用在$[a, b]=a^p$ 的两边，易得 $b^y=b$，于是 $C_S(b)=S$，故 G 有如下构造：

$G=\langle a, b, y\rangle\times\langle x\rangle$，$a^b=a^{1+p}$，$a^y=a^{-1}$，$b^y=b$

(51)

3)当 $C_S(a)=\langle x^2, y\rangle$ 时，可设 $a^x=a^{-1}$。这时同样有 $C_S(b)=S$，故 G 有如下构造：

$G=\langle a, b, x\rangle\times\langle y\rangle$，$a^b=a^{1+p}$，$a^x=a^{-1}$，$b^x=b$

(52)

4)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$ 时，可设 $a^x=a^s$。这时同样有 $C_S(b)=S$，故 G 有如下构造：

$G=\langle a, b, x\rangle\times\langle y\rangle$，$a^b=a^{1+p}$，$a^x=a^s$，$b^x=b$

(53)

由此可见，当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 4 个彼此不同构的类型；2)当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 没有构造(53)，因此恰有 3 个彼此不同构的类型。综上所述，引理 4 成立。

引理 5 设 p 是奇素数($p\neq3,7$)，G 的 Sylow 2−子群为 S 而 Sylow p−子群为指数是 p 的 p^3 阶非交换群 P_5，那么：1)当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 13 个彼此不同构的类型；2)当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 8 个彼此不同构的类型。

证明：因为 $C(P_5)=\langle c\rangle$，而 $C(P_5)$ char P_5，所以 $\langle c\rangle$ 是 G 的正规子群，从而 $P_5/\langle c\rangle$ 是 S−不变的。如果 S 在 P_5 上的作用是平凡的，则 G 是 P_5 与 S 的直积。如果 S 在 P_5 上的作用是非平凡的，且 G 是超可解的，那么不妨设 $\langle a\rangle$，$\langle b\rangle$ 都是 S−不变的，于是 $C_S(a)$与 $C_S(b)$中至少有一个不是 S。注意到 a，b 在 P_5 中是对称的，因此当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 有如下几种不同构的类型：

1)当 $C_S(a)=\langle x\rangle$，$C_S(b)=S$ 时，必有 $a^y=a^{-1}$，再将 y 分别作用在$[a,\ b]=c$ 的两边得 $c^y=c^{-1}$，于是 G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,y\rangle\times\langle x\rangle,\ a^y=a^{-1},\ b^y=b,\ c^y=c^{-1} \tag{54}$$

2)当 $C_S(a)=\langle x^2,y\rangle$，$C_S(b)=S$ 时，必有 $a^x=a^{-1}$，于是 $c^x=c^{-1}$，G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=a^{-1},\ b^x=b,\ c^x=c^{-1} \tag{55}$$

3)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=S$ 时，可设 $a^x=a^s$。这时 G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^x=b,\ c^x=c^s \tag{56}$$

4)当 $C_S(a)=\langle x\rangle$，$C_S(b)=\langle x^2,y\rangle$ 时，可设 $a^y=a^{-1}$，$b^x=b^{-1}$，于是 $c^x=c^y=c^{-1}$，故 G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,x,y\rangle,\ a^x=a,\ a^y=a^{-1},\ b^x=b^{-1},\ b^y=b,\ c^x=c^y=c^{-1} \tag{57}$$

5)当 $C_S(a)=C_S(b)=\langle x^2,y\rangle$ 时，可设 $a^x=a^{-1}$，$b^x=b^{-1}$，于是 $c^x=c$，G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=a^{-1},\ b^x=b^{-1},\ c^x=c \tag{58}$$

6)当 $C_S(a)=C_S(b)=\langle x\rangle$ 时，可设 $a^y=a^{-1}$，$b^y=b^{-1}$，于是 $c^y=c$，G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,y\rangle\times\langle x\rangle,\ a^y=a^{-1},\ b^y=b^{-1},\ c^y=c \tag{59}$$

7)当 $CS(a)=\langle x\rangle$，$CS(b)=\langle xy\rangle$ 时，可设 $a^y=a^{-1}$，$b^x=b^{-1}$，$b^y=b^{-1}$，于是 $c^x=c^{-1}$，$c^y=c$，故 G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,x,y\rangle,\ a^x=a,\ a^y=a^{-1},\ b^x=b^{-1},\ b^y=b^{-1},\ c^x=c^{-1},\ c^y=c \tag{60}$$

8)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=\langle x\rangle$ 时，可设 $a^x=a^s$，$b^y=b^{-1}$。这时 G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,x,y\rangle,\ a^x=a^s,\ a^y=a,\ b^x=b,\ b^y=b^{-1},\ c^x=c^s,\ c^y=c^{-1} \tag{61}$$

9)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=\langle x^2,y\rangle$ 时，可设 $a^x=a^s$，$b^x=b^{-1}$，于是 G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^x=b^{-1},\ c^x=c^s \tag{62}$$

10)当 $C_S(a)=C_S(b)=\langle y\rangle$ 时，可设 $a^x=a^s$，则 $b^x=b^s$ 或 b^{-s}，于是 $c^x=c^{-1}$ 或 c，故 G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=a^s,\ b^x=b^s \text{ 或 } b^{-s},\ c^x=c^{-1} \text{ 或 } c \tag{63}$$

11)当 $C_S(a)=\langle y\rangle$，$C_S(b)=\langle x^2y\rangle$ 时，可设 $a^x=a^s$，若令 $b^x=b^s$，$b^y=b^{-1}$，则有 $c^x=c^y=c^{-1}$，故 G 有如下构造：

$$G=\langle a,b,c,x,y\rangle,\ a^x=a^s,\ a^y=a,\ b^x=b^s,\ b^y=b^{-1},\ c^x=c^y=c^{-1} \tag{64}$$

如果令 $b^x=b^{-s}$，$b^y=b^{-1}$，那么所得的构造与(64)是同构的(因为 $\langle x,y\rangle=\langle xy,y\rangle$，只要用 xy 代替 x 即知)。

由此可见，当 $p\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有 13 个彼此不同构的类型。

如果 S 在 P_5 上的作用是非平凡的，且 G 不是超可解的，那么 $P_5/\langle c\rangle$ 是 S-不可分解的。这时必有 $p\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 4)$。类似于引理 3 的讨论，可知当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 恰有一种非超可解的构造：

$$G=\langle a,b,c,x\rangle\times\langle y\rangle,\ a^x=b,\ b^x=a^{-1},\ c^x=c \tag{65}$$

当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时，$G$ 没有构造(56)，（61）~（64），因此 G 恰有 8 个彼此不同构的类型。综上所述，引理 5 成立。

由引理 1 至引理 5，易知定理 1 成立。

参考文献：

[1] 肖文俊，谭忠. 阶为2^3p^3的群的构造[J]. 厦门大学学报:自然科学版,1995,34(5):845-846.

[2] 蔡琼.2^3p^3阶群的构造[J].数学杂志,2005,25(4):449-452.

[3] 张远达. 有限群构造[M]. 北京:科学出版社,1982.

[4] 陈松良,李惊雷,欧阳建新. 论 p^3q 阶群的构造[J]. 山东大学学报:理学版,2013, 48(2):27-31.

[5] Kurzweil H, Stellmacher B. The theory of finite groups: an introduction[M]. New York:Springer-Verlag,Inc. 2004.