

文章编号:1673-0062(2011)02-0095-05

基于灰色系统理论单桩竖向极限承载力的预测

罗建阳,饶秋华

(中南大学 土木工程学院,湖南 长沙 410075)

摘要:根据不完全的竖向静载试验数据,利用灰色系统理论的 GM(1,1)模型预测单桩的竖向极限承载力,并对结果的合理性及误差进行分析.工程实例分析表明,竖向静载试验所施加的荷载达到或超过极限荷载的四分之三时,利用其数据进行单桩竖向极限承载力的预测具有较高的精度.同时新信息 GM(1,1)模型、新陈代谢 GM(1,1)模型比老信息 GM(1,1)模型预测的结果更精确.

关键词:灰色系统理论;GM(1,1)模型;单桩;极限承载力;预测

中图分类号:TU473

文献标识码:A

Prediction for Utmost Bearing Capacity of Single Pile Based on Gray System Theory

LUO Jian-yang, RAO Qiu-hua

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha, Hunan 410075, China)

Abstract: According to incomplete data of the single pile on the vertical static loading test, this research aims to predict the vertical utmost bearing capacity of the single pile by GM(1,1) model of the gray system theory, and to analyze the reasonableness and error of results. Analysis about a practical engineering example indicates that the prediction of the vertical utmost bearing capacity of the single pile by the test data has comparative accuracy when the load reaches or exceeds the utmost bearing capacity of tree-quarters during the vertical static loading test, also the new information GM(1,1) model and the metabolic GM(1,1) model have more accurate prediction than the old information GM(1,1) model.

key words: grey system theory; GM(1,1) model; single pile; utmost bearing capacity; prediction

确定单桩极限承载力的方法主要有竖向静载试桩法、原位测试法、静力学计算法、高应变动力检测法等.由于影响桩的极限承载力的因素很多,

建立一个全面反映这些影响因素的理论分析模型相当困难.高应变动力检测法实际是一种经验或半经验法,依赖于经验系数的可靠性和适用条件

收稿日期:2011-05-23

作者简介:罗建阳(1975-),男,江西吉安人,中南大学土木工程学院讲师,硕士研究生.主要研究方向:岩土工程、建筑结构检测.

的局限性. 竖向静载试验是确定单桩竖向极限承载力最直观、最可靠的方法, 但存在试验成本高、时间长等缺点. 工程上对于检验性试验桩、大直径桩、超长桩, 或反力装置出现故障等原因, 有可能未进行到极限荷载出现就终止试验的情况. 所以利用不完全的竖向静载试验数据预测单桩极限承载力有实际的工程意义. 灰色系统理论是 20 世纪 80 年代, 由中国学者邓聚龙教授首先提出并创立的一门新兴学科. 它是基于数学理论的系统工程学科, 主要解决一些包含未知因素的特殊领域的问题确定.

1 单桩竖向极限承载力灰色预测模型

1.1 非等步长 GM(1,1) 模型

由竖向静载试验得到的 $Q \sim s$ 曲线一般具有灰指数律特性, 将荷载 Q 作为灰信息, 沉降 S 作为广义时间, 建立非等步长的 GM(1,1) 模型.

记原始荷载序列为

$$Q^{(1)} = \left\{ Q^{(1)}(i) \mid_{i=1,2,\dots,n} \right\} \quad (1)$$

对该序列进行一次累减生成得到新序列

$$Q^{(0)} = \left\{ Q^{(0)}(i) = Q^{(1)}(i) - Q^{(1)}(i-1) \mid_{i=2,\dots,n} \right\} \quad (2)$$

记实测桩顶沉降序列为

$$s^{(1)} = \left\{ s^{(1)}(i) \mid_{i=1,2,\dots,n} \right\} \quad (3)$$

对该序列进行一次累减生成得到新序列

$$s^{(0)} = \left\{ s^{(0)}(i) = s^{(1)}(i) - s^{(1)}(i-1) \mid_{i=2,\dots,n} \right\} \quad (4)$$

根据灰色系统的建模方法, 建立一个一阶线性动态微分方程

$$\frac{dQ^{(1)}}{ds} + aQ^{(1)} = b \quad (5)$$

式中: a —发展系数, $1/\text{mm}$; b —灰作用量, kN/mm .

a 和 b 由下式确定

$$[a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_n \quad (6)$$

式中:

$$B = \begin{bmatrix} s^{(0)}(2) & & & 0 \\ & s^{(0)}(3) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s^{(0)}(n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[Q^{(1)}(1) + Q^{(1)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[Q^{(1)}(2) + Q^{(1)}(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[Q^{(1)}(n-1) + Q^{(1)}(n)] & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$Y_n = [Q^{(0)}(2), Q^{(0)}(3), \dots, Q^{(0)}(n)]^T \quad (8)$$

式(5)的解

$$\hat{Q}^{(1)}(k+1) = \left[Q^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right] \times e^{-a \int s^{(1)}(k+1) - s^{(1)}(1) ds} + \frac{b}{a} \quad (9)$$

应用式(9), 当沉降量已知, 即可预测桩顶对应的荷载值 $\hat{Q}^{(1)}(k+1)$.

1.2 预测模型的精度检验

为了保证预测结果的可靠性, 确定预测精度是否满足要求, 需对模型算出的结果进行精度检验.

1) 残差合格模型检验

记残差

$$\varepsilon(i) = \hat{Q}^{(1)}(i) - Q^{(1)}(i) \quad (10)$$

相对误差

$$\Delta(i) = \frac{\varepsilon(i)}{Q^{(1)}(i)} \quad (11)$$

平均相对误差

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta(i) \quad (12)$$

对于给定的 α , 当 $\bar{\Delta} < \alpha$ 且 $\Delta(i) < \alpha$ 时, 判定模型为残差合格模型.

2) 后验差比合格模型检验

残差均值

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon(i) \quad (13)$$

残差方差

$$R_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon(i) - \bar{\varepsilon})^2 \quad (14)$$

原始数据均值

$$\bar{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q^{(1)}(i) \quad (15)$$

原始数据方差

$$R_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Q^{(1)}(i) - \bar{Q})^2 \quad (16)$$

后验差比值

$$C = \frac{R_1}{R_2} \quad (17)$$

对于给定的 C_0 , 当 $C < C_0$ 时, 判定模型为后验差比合格模型.

3) 小误差概率合格模型检验

$$P = P\{|\varepsilon(i) - \bar{\varepsilon}| < 0.6745R_2\} \quad (18)$$

对于给定的 P_0 , 当 $P > P_0$ 时, 判定模型为小误差概率合格模型.

以上三种检验方法,平均相对误差和相对误差要求越小越好,后验差比值越小越好,小误差概率越大越好.根据计算的后验差比值和小误差概率可评测预测精度,见表1.

表1 预测精度检验表
Table 1 Prediction accuracy test

预测精度	小误差概率 P	后验差比值 C
好	>0.95	<0.35
合格	>0.80	<0.50
勉强	>0.70	<0.65
不合格	≤ 0.70	≥ 0.65

1.3 非等步长残差 GM(1,1) 模型

若预测值不满足精度要求,可以建立非等步长残差 GM(1,1) 模型.由式(9)求出的预测值进行一次累减生成得到新序列

$$\hat{Q}^{(0)} = \left\{ \hat{Q}^{(0)}(i) = \hat{Q}^{(1)}(i) - \hat{Q}^{(1)}(i-1) \mid_{i=2, \dots, n} \right\} \quad (19)$$

记残差序列为

$$\varepsilon^{(0)} = \left\{ \varepsilon^{(0)}(i) = Q^{(0)}(i) - \hat{Q}^{(0)}(i) \mid_{i=2, \dots, n} \right\} \quad (20)$$

对该序列进行一次累加生成得到新序列

$$\varepsilon^{(1)} = \left\{ \varepsilon^{(1)}(i) = \sum_{k=2}^i \varepsilon^{(0)}(k) \mid_{i=2, \dots, n} \right\} \quad (21)$$

同前面原始数据的建模方法,可得

$$\hat{\varepsilon}^{(1)}(k+1) = \left[\varepsilon^{(1)}(2) - \frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon} \right] e^{-a_\varepsilon \Gamma_s^{(1)}(k+1) - s^{(1)}(2)} + \frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon} \quad (22)$$

将式(22)与式(9)叠加,得到残差修正 GM(1,1) 模型

$$\hat{Q}^{(1)}(k+1) = \left[Q^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-a \Gamma_s^{(1)}(k+1) - s^{(1)}(1)} + \frac{b}{a} + \left[\varepsilon^{(1)}(2) - \frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon} \right] e^{-a_\varepsilon \Gamma_s^{(1)}(k+1) - s^{(1)}(2)} + \frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon} \quad (23)$$

对式(23)求出的预测值再进行精度检验,若不满足精度要求,可再进行残差修正,至到满足所需精度为至.

1.4 基于灰色系统理论单桩竖向极限承载力的预测

利用式(9)或式(23)可对单桩的极限承载力进行预测.当 $S^{(1)}(k+1) \rightarrow \infty$,对 $\hat{Q}^{(1)}(k+1)$ 求极限,即为单桩的极限承载力 \hat{Q}_u .

非等步长 GM(1,1) 模型中,单桩竖向极限承载力

$$\hat{Q}_u = \lim_{S \rightarrow \infty} \hat{Q}^{(1)}(k+1) = \frac{b}{a} \quad (24)$$

非等步长残差 GM(1,1) 模型中,单桩竖向极限承载力

$$\hat{Q}_{u,\varepsilon} = \lim_{S \rightarrow \infty} \hat{Q}^{(1)}(k+1) = \frac{b}{a} + \frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon} \quad (25)$$

1.5 灰色预测 GM(1,1) 模型群

原始荷载序列为式(1),用式(1)建立的 GM(1,1) 模型称为全数据 GM(1,1) 模型.

设 $Q^{(1)}(n+1)$ 为最新信息,将 $Q^{(1)}(n+1)$ 置入 $Q^{(1)}$,得新序列

$$Q^{(1)} = \left\{ Q^{(1)}(i) \mid_{i=1, 2, \dots, n+1} \right\} \quad (26)$$

用式(26)建立的 GM(1,1) 模型称为新信息 GM(1,1) 模型.

将最新信息 $Q^{(1)}(n+1)$ 置入 $Q^{(1)}$,去掉最老信息 $Q^{(1)}(1)$,得新序列

$$Q^{(1)} = \left\{ Q^{(1)}(i) \mid_{i=2, \dots, n+1} \right\} \quad (27)$$

用式(27)建立的 GM(1,1) 模型称为新陈代谢 GM(1,1) 模型.

灰色系统在发展的过程中,将会不断地有一些随机扰动或驱动因素进入系统,使系统的发展受其影响.所以必须不断地考虑随时间推移相继进入的新因素,将每一个新得到的数据置入,建立新信息 GM(1,1) 模型.同时随着系统的发展,老数据的信息意义将逐步降低,及时地去掉老数据,建模序列才更能反映系统目前的特征.从预测的角度看,新陈代谢 GM(1,1) 模型是最理想的模型.

2 工程实例分析

根据山东省某工程 69#、201#、324# 桩的单桩竖向抗压承载力静载检验性试验和高应变动力检测试验数据,利用灰色系统理论对桩的竖向极限承载力进行分析预测.

分别建立 69#、201#、324# 竖向抗压极限承载力预测的全数据 GM(1,1) 模型,试验数据及分析预测结果分别见表2、表3、表4.

由计算出的后验差比值、小误差概率可判断该模型合格.分析结果表明,该模型预测单桩极限承载力的精度与竖向静载试验的数据级数有密切关系.预测精度较高的是原始数据之后的 1~2 个,中长距离的预测可能造成较大的偏差.由表2、表3、表4可知竖向静载试验所施加的荷载小

表2 69#桩试验数据及全数据 GM(1,1)模型分析预测结果

Table 2 Test data and prediction results by the all information GM(1,1) model of 69# pile

级数	载荷 Q/kN	沉降 s/mm	发展 系数 $a/(1 \cdot \text{mm}^{-1})$	灰色作 用量 $b/(\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1})$	承载力 预测值 $/\text{kN}$	承载力 实测值 $/\text{kN}$	相对 误差 $/\%$	后验差 比值 C	小误差 概率 P
1	240	0.72							
2	360	1.19							
3	480	2.06							
4	600	3.23							
5	720	4.81							
6	840	6.59							
7	960	8.54	0.168 4	202.903 3	1 204	1 450	-17.0	0.087	1
8	1 080	11.12	0.139 2	184.076 3	1 322	1 450	-8.8	0.083	1
9	1 200	13.91	0.113 6	165.583 6	1 458	1 450	0.6	0.085	1

表3 201#桩试验数据及全数据 GM(1,1)模型分析预测结果

Table 3 Test data and prediction results by the all information GM(1,1) model of 201# pile

级数	载荷 Q/kN	沉降 s/mm	发展 系数 $A/(1 \cdot \text{mm}^{-1})$	灰色作 用量 $B/(\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1})$	承载力 预测值 $/\text{kN}$	承载力 实测值 $/\text{kN}$	相对 误差 $/\%$	后验差 比值 C	小误差 概率 P
1	240	0.26							
2	360	0.60							
3	480	1.26							
4	600	2.35							
5	720	3.62							
6	840	4.96							
7	960	6.70	0.203 4	245.044 2	1 205	1 470	-18.0	0.098	1
8	1 080	8.70	0.162 8	218.640 9	1 343	1 470	-8.6	0.097	1
9	1 200	10.83	0.130 3	195.179 9	1 498	1 470	2.0	0.140	1

表4 324#桩试验数据及全数据 GM(1,1)模型分析预测结果

Table 4 Test data and prediction results by the all information GM(1,1) model of 324# pile

级数	载荷 Q/kN	沉降 s/mm	发展 系数 $a/(1 \cdot \text{mm}^{-1})$	灰色作 用量 $b/(\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1})$	承载力 预测值 $/\text{kN}$	承载力 实测值 $/\text{kN}$	相对 误差 $/\%$	后验差 比值 C	小误差 概率 P
1	240	0.26							
2	360	0.60							
3	480	1.17							
4	600	1.89							
5	720	3.07							
6	840	4.64							
7	960	6.69	0.312 1	330.414 9	1 059	1 320	-19.8	0.077	1
8	1 080	8.98	0.225 3	269.598 5	1 197	1 320	-9.3	0.105	1
9	1 200	11.38	0.163 0	221.261 8	1 357	1 320	2.8	0.123	1

于极限荷载的三分之二时,利用其数据进行预测存在较大的相对误差;竖向静载试验所施加的荷载达到或超过极限荷载的三分之二时,利用其数据进行预测相对误差大幅度减少,具有较高的精度。

以第1~8级荷载序列分别建立69#、201#、324#竖向抗压极限承载力预测的老信息GM(1,1)

模型、新信息GM(1,1)模型、新陈代谢GM(1,1)模型,分析预测结果分别见表5、表6、表7。

分析结果表明,新信息GM(1,1)模型、新陈代谢GM(1,1)模型比老信息GM(1,1)模型预测的效果要好。随着系统的发展去掉作用减弱的老数据,增加体现系统现时特征的新数据,有助于预测精度的提高。

表5 69#桩三种GM(1,1)模型分析预测结果

Table 5 Prediction results by three different GM(1,1) model of 69# pile

模型类别	发展系数 $a/(1 \cdot \text{mm}^{-1})$	灰色作用量 $b/(\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1})$	承载力预测值 /kN	承载力实测值 /kN	相对误差 /%	后验差比值 C	小误差概率 P
老信息模型	0.139 2	184.076 3	1 322	1 450	-8.8	0.083	1
新信息模型	0.113 6	165.583 6	1 458	1 450	0.6	0.085	1
新陈代谢模型	0.097 3	149.319 6	1 535	1 450	5.9	0.044	1

表6 201#桩三种GM(1,1)模型分析预测结果

Table 6 Prediction results by three different GM(1,1) model of 201# pile

模型类别	发展系数 $a/(1 \cdot \text{mm}^{-1})$	灰色作用量 $b/(\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1})$	承载力预测值 /kN	承载力实测值 /kN	相对误差 /%	后验差比值 C	小误差概率 P
老信息模型	0.162 8	218.640 9	1 343	1 470	-8.6	0.097	1
新信息模型	0.130 3	195.179 9	1 498	1 470	2.0	0.140	1
新陈代谢模型	0.109 7	174.881 3	1 594	1 470	8.4	0.047	1

表7 324#桩三种GM(1,1)模型分析预测结果

Table 7 Prediction results by three different GM(1,1) model of 324# pile

模型类别	发展系数 $a/(1 \cdot \text{mm}^{-1})$	灰色作用量 $b/(\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1})$	承载力预测值 /kN	承载力实测值 /kN	相对误差 /%	后验差比值 C	小误差概率 P
老信息模型	0.225 3	269.598 5	1 197	1 320	-9.3	0.105	1
新信息模型	0.163 0	221.261 8	1 357	1 320	2.8	0.123	1
新陈代谢模型	0.140 7	198.987 4	1 414	1 320	7.1	0.094	1

3 结 语

1) 根据灰色系统理论建立GM(1,1)模型,利用不完全的竖向静载试验数据预测单桩的极限承载力.分析结果表明,非等步长GM(1,1)模型预测单桩极限承载力的精度与竖向静载试验的数据级数有密切关系.预测精度较高的是原始数据之后的1~2个,中长距离的预测可能造成较大的偏差.竖向静载试验所施加的荷载小于极限荷载的四分之三时,利用其数据进行单桩竖向极限承载力的预测存在较大的相对误差;竖向静载试验所施加的荷载达到或超过极限荷载的四分之三时,利用其数据进行单桩竖向极限承载力预测相对误差大幅度减少,具有较高的精度.

2) 根据在工程中的运用结果表明,新信息GM(1,1)模型、新陈代谢GM(1,1)模型比老信息GM(1,1)模型预测的效果更精确.随着系统的发展去掉作用减弱的老数据,增加体现系统现时特征的新数据,有助于预测精度的提高.

3) 单桩竖向极限承载力的灰色预测模型适用于有明显变化阶段的 $Q \sim s$ 曲线,对于无明显变化阶段的曲线应用GM(1,1)模型进行极限承载力的预测需进一步分析研究.

参考文献:

- [1] 邓聚龙.灰色理论基础[M].武汉:华中科技大学出版社,2002.
- [2] 刘利民,舒翔.桩基工程的理论进展与工程实践[M].北京:中国建材工业出版社,2002.
- [3] 韩晓林,王五平.桩基承载力检测的准静载灰色方法[J].岩土工程学报,2000,22(1):131-132.
- [4] 罗战友,董青华,龚晓南.未达到破坏的单桩极限承载力的灰色预测[J].岩土力学,2004,25(2):304-307.
- [5] 杜海金,张凯,杨艳秋.基于GM(1,1)预测模型的桩基工程研究[J].河北工程大学学报(自然科学版),2007,24(2):1-3.
- [6] 肖本职,张仕光.重庆地区单桩极限承载力灰色预测[J].地下工程,2000,20(2):134-136.