

# 几类图的连通包数

王展鹏, 贾倩琼, \*马僊龙

(西安石油大学理学院, 陕西, 西安 710065)

**摘要:** 通过研究几类图的连通包数, 确定了友谊图、风车图及联图  $P_m \vee \overline{K_n}$  与  $C_m \vee \overline{K_n}$  的连通包数, 其中  $P_m$  是具有  $m$  个顶点的路,  $C_m$  是长度为  $m$  的圈, 且  $\overline{K_n}$  是完全图  $K_n$  的补图。

**关键词:** 凸集; 连通包集; 连通包数

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1674-8085.2023.05.002

## CONNECTED HULL NUMBERS OF SOME CLASSES OF GRAPHS

WANG Zhan-peng, JIA Qian-qiong, \*MA Xuan-long

(School of Science, Xi'an Shiyu University, Xi'an, Jiangxi 710065, China)

**Abstract:** This paper determines the connected hull numbers of friendship graphs, dutch windmill graphs, and join graphs  $P_m \vee \overline{K_n}$  and  $C_m \vee \overline{K_n}$ , where  $P_m$  is the path of size  $m$ ,  $C_m$  is the cycle of length  $m$ , and  $\overline{K_n}$  is the complement of complete graph  $K_n$ .

**Key words:** convex set; connected hull set; connected hull number

## 0 引言

本文所考虑的图均是简单有限的, 即没有重边和环的无向图。不失一般性, 用  $(V, E)$  表示一个图  $G$ , 即  $G = (V, E)$ , 其中  $V$  和  $E$  分别表示  $G$  的顶点集及边集。有时候也用  $V(G)$  和  $E(G)$  分别表示  $G$  的顶点集和边集。 $G$  的补图记作  $\overline{G}$ 。对于任一有限集合  $S$ ,  $S$  的势或大小 (cardinality) 记作  $|S|$ , 是该集合  $S$  中元素的个数。如果图  $G$  的任意两个不同的顶点之间均有边, 则称该图  $G$  为一个完全图; 特别地, 具有  $n$  个顶点的完全图记为  $K_n$ 。显然,  $\overline{K_n}$  表示一个没有边只包含  $n$  个顶点的图, 即大小为  $n$  的空图。令  $S \subseteq V$ , 记由集合  $S$  诱导的  $G$  的诱导子图为  $G[S]$ , 其中  $G[S]$  的顶点集为  $S$  且  $S$

中两个不同的顶点之间有边当且仅当这两个顶点在  $G$  中有边。设  $v \in V$ , 用  $N_G(v)$  表示顶点  $v$  的邻域 (neighborhood), 即  $N_G(v)$  是所有与  $v$  相邻的顶点构成的集合。此外, 用  $\deg_G(v)$  表示顶点  $v$  的度数 (degree), 即  $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ 。顶点  $v$  被称为  $G$  的一个极点 (extreme-vertex), 如果由集合  $N_G(v)$  诱导的  $G$  的子图是完全的。在  $G$  中, 取  $u, v \in V$ , 如果从  $u$  到  $v$  有一条路, 则  $u$  与  $v$  之间的距离 (distance) 记作  $d(u, v)$ , 是指从  $u$  到  $v$  的所有路中最短路程的距离。 $G$  中任意两个不同顶点之间的距离的最大值称为该图  $G$  的直径 (diameter), 记为  $diam(G)$ 。在所有从  $u$  到  $v$  的路中, 距离为  $d(u, v)$  的路称之为一条  $u-v$  测地 (geodesic) 路或  $u-v$  测地线。落在所有  $u-v$  测地线上的顶点构成的集合记为  $I[u, v]$ 。设  $S \subseteq V$ , 用  $I[S]$  表示  $S$  中任

两个不同顶点  $x$  和  $y$  之间的落在所有  $x-y$  测地线上的顶点所构成的集合的并, 即  $I[S] = \bigcup_{x,y \in S} I[x,y]$ 。

对于顶点集合  $V$  的某个子集  $S$ , 如果  $I[S] = S$ , 则称  $S$  是一个凸集 (convex set)。特别地, 如果  $S = \{v\}$  或  $S = V$ , 则  $S$  显然是一个凸集。图  $G$  的凸数 (convexity number) 被记作  $C(G)$ , 是  $G$  的具有最大基数凸集的大小。令  $S \subseteq V$ , 则包含  $S$  的最小的凸集称为  $S$  的凸包, 记作  $I_h(S)$ 。若  $I[S] = V$  和  $I_h(S) = V$ , 则称集合  $S$  分别为图  $G$  的测地集 (geodetic set) [1-3] 和包集 (hull set) [2-4]。一个图  $G$  中所有测地集的最小的基数称为该图的测地数, 且被记作  $g(G)$ 。类似地, 图  $G$  的包数是该图的所有包集的最小基数, 被记为  $h(G)$ 。

在文献[5]中, John 和 Mary 首次引入了图的连通包数的概念, 并且他们研究了图的连通包数的一些重要性质及一些有趣的问题。2013 年马僇龙等[6]计算了一些经典图类的连通包数, 包括路、圈、树、完全二部图、轮图及蛛网图。利用图的最大或小度研究图论中的参数一直是图论中一个热门的研究课题, 例如彩春丽等[7]通过分析未着色顶点的邻近顶点的着色情况, 利用图的最大度点扩充图的部分线性着色, 其中图的线性色数是指对图进行线性着色所用最少颜色数。此外, 彩春丽等[8]也研究了围长至少为 5 的平面图的线性着色问题。蔡学鹏等[9]应用概率论中的 Lovasz 一般局部引理, 得出了图的邻点强可区别  $V$ -全色数的上界。严政等[10]研究了图的最小度和无矛盾连通数。李雨欣等[11]研究了最大度至多为 3 的图上极大分离集的最大数目。余桂东等[12]给了一些带有最小度的哈密尔顿图的充分条件。金剑行等[13]利用图的最大、小度, 给出了图的、测地数、包数及连通包数三者之间的大小关系, 并根据两类特殊图 (完全二部图、分裂图) 的结构构造了连通包数为 3 的图类。郭梦夏等[14]计算了蛛网图的连通包数。基于此可确定了友谊图、风车图及联图

$P_m \vee \overline{K_n}$  与  $C_m \vee \overline{K_n}$  的连通包数, 其中  $P_m$  是具有  $m$  个顶点的路,  $C_m$  是长度为  $m$  的圈。

## 1 定义

**定义 1.1** 给定图  $G=(V,E)$  和子集  $S \subseteq V$ , 如果  $S$  是  $G$  的一个包集且诱导子图  $G[S]$  是连通的, 那么称  $S$  为  $G$  的一个连通包集。在所有连通包集的基数中, 最小的基数称为  $G$  的连通包数, 记作  $h_c(G)$ 。

根据上述定义, 下面的结果显然成立, 见文献[6]中的引理 2.1, 该结果将应用于下面的证明中。

**注 1** 给定图  $G=(V,E)$  和  $V$  的子集  $S$ , 则有  $S \subseteq I[S] \subseteq I_h(S) \subseteq V$ 。

接下来, 举例说明上述定义, 将应用在下面的证明中。

**例 1** 在图 1 中, 设  $S=\{a_2, a_4\}$ , 于是  $d(a_2, a_4)=2$  且  $I[S]=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 。因此  $S$  不是一个凸集, 但是  $I_h(S)=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 。这意味着  $S$  是该图的一个包集, 进而  $h(G)=2$ 。由于  $G[S]$  不是连通的, 故  $S$  不是该图的连通包集。

类似地, 如果考虑  $S_1=\{a_1, a_2, a_4\}$ , 则显然有  $I[S_1]=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}=V$ 。此时易知  $I_h(S_1)=V$ , 故  $S_1$  是  $G$  的一个包集。由于  $G[S_1]$  是连通图, 故  $S_1$  是  $G$  的连通包集。因此,  $h_c(G)=3$ 。同理可知  $S_3=\{a_2, a_3, a_4\}$  也是  $G$  的一个连通包集。

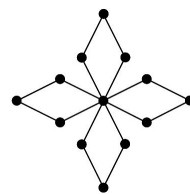
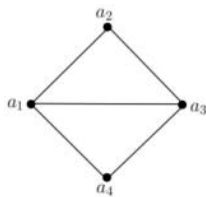


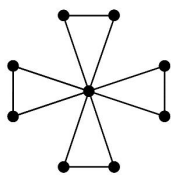
图 1 具有四个顶点的一个图  
Fig.1 A graph with four vertices

**定义 1.2** 友谊图  $F_n$  (Friendship Graph) 将  $n$  个  $C_3$  共享一个公共顶点所构成的图, 其中  $C_3$  表示长度为 3 的圈。注意  $F_1=C_3$  且  $F_n$  有  $2n+1$  个顶点, 图 2 表示的是友谊图  $F_3$ 。

图2 友谊图  $F_3$ Fig.2 Friendship graph  $F_3$ 

**定义 1.3** 风车图  $D_4^n$  (Dutch Windmill Graph)

将  $n$  个长度为 4 的圈  $C_4$  共享一个公共顶点所构成的图。注意  $D_4^1 = C_4$  且  $D_4^n$  有  $3n+1$  个顶点, 图 3 表示的是风车图  $D_4^4$ 。

图3 风车图  $D_4^4$ Fig.3 Windmill graph  $D_4^4$ 

**定义 1.4** 图  $G_1$  和  $G_2$  的联图  $G_1 \vee G_2$  定义为:

$V(G_1 \vee G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$  且  $E(G_1 \vee G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{u, v\} | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ 。

从上述联图的定义可以看出, 对于两个图  $G_1$  和  $G_2$ , 它们的联图  $G_1 \vee G_2$  以图  $G_1$  和  $G_2$  的顶点集的并为顶点集 (注意它们的顶点集的交始终是空集),  $G_1 \vee G_2$  的边集是由它们各自的边集之并跟集合  $\{\{u, v\} | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$  的并构成。

## 2 一些连通图的连通包数

下面将给出以下主要结果及证明。

**定理 2.1** 设  $n \geq 2$ , 则  $h_c(F_n) = 2n+1$ 。

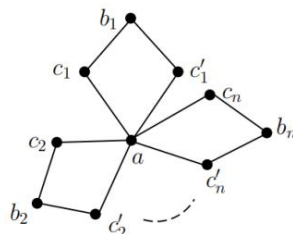
**证明** 假设  $V$  是  $F_n$  的顶点集,  $a$  是  $F_n$  共享的公共顶点且  $S$  是  $F_n$  的一个连通包集。考虑到  $|S| > 1$  且  $F_n$  的任一连通包集所诱导的子图是连通的, 可知  $a \in S$ , 因为  $a$  是  $F_n$  的割点。于是根据  $F_n$  的定义可知  $I[S] = S$ , 即  $S$  是一个凸集, 进而有  $I_h(S) = S$ 。现在根据连通包集的定义, 必须有  $S = V$ 。因此在所有  $F_n$  的连通包集中, 最小的基数

为  $V$  的大小, 即  $h_c(F_n) = 2n+1$ 。

**定理 2.2** 设  $n \geq 2$ , 则  $h_c(D_4^n) = 2n+1$ 。

**证明** 假设  $V$  是  $D_4^n$  的顶点集, 现对  $D_4^n$  的顶点进行标记, 如图 4 所示。现在令  $S$  是  $D_4^n$  的一个连通包集, 注意  $|S| > 1$  且  $D_4^n$  的连通包集所诱导的子图是连通的。因为  $a$  是  $D_4^n$  的割点, 可知  $a \in S$ 。

下面断言  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq S$ 。反证, 假设在集合  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  中存在某个元素不属于  $S$ , 不妨设  $b_1 \notin S$ , 则必定有  $b_1 \notin I[S]$ 。若设  $S' = V - \{b_1\}$ , 则显然  $I[S'] = S'$ , 于是  $S'$  是一个凸集且  $S \subseteq S'$ 。这意味着  $I_h(S) \subseteq S' \subset V$ , 即  $S$  不是一个包集, 这与假设矛盾。因此, 断言成立, 即  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq S$ 。

图4  $D_4^n$  的顶点Fig.4 The vertices of  $D_4^n$ 

接下来, 注意到对所有  $1 \leq i \leq n$ ,  $\{c_i, c'_i\}$  是图  $D_4^n$  一个割点集。因此对每一个  $1 \leq i \leq n$ ,  $c_i, c'_i$  中的某一个元素必须属于  $S$ 。为了使  $S$  的基数最小, 可考虑下面的集合:

$$S_1 = \{a, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

首先, 容易看出由  $S_1$  所诱导的子图是连通的且  $I[S_1] = V$ 。于是根据注 1, 可知  $S_1$  确实是  $D_4^n$  的一个连通包集。因此, 现在只需令  $S = S_1$ , 可知  $h_c(D_4^n) = 2n+1$ 。

**定理 2.3**

$$h_c(P_m \vee \overline{K_n}) = \begin{cases} n+1, & \text{当 } m=1 \text{ 且 } n \geq 1; \\ n+1, & \text{当 } m=2 \text{ 且 } n \geq 2; \\ \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2, & \text{当 } m \geq 3 \text{ 且 } n=1; \\ 3, & \text{其它。} \end{cases}$$

**证明** 先对该联图的两部分  $P_m$  和  $\overline{K_n}$  的顶点进行标记。设

$$V(P_m) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, \quad V(\overline{K_n}) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

如果  $m=2$  且  $n=1$ , 则  $P_m \vee \overline{K_n}$  同构于完全图  $K_3$ , 于是有  $h_c(P_m \vee \overline{K_n}) = 3$ 。

现在考虑下面的四种情况:

#### 情况 1 $m=1$

此时  $P_m \vee \overline{K_n}$  是一个大小为  $n+1$  的星图, 于是根据文献[6]的定理 2.5, 可知  $h_c(P_m \vee \overline{K_n}) = m+n$ , 因此结论成立。

#### 情况 2 $m=2$

若  $n=1$ , 则  $P_m \vee \overline{K_n}$  同构于完全图  $K_3$ , 于是  $h_c(P_m \vee \overline{K_n}) = 3$ 。现在假设  $n \geq 2$  且设  $S$  是  $P_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集。如果在  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  中存在一个不属于  $S$  的元素, 不妨设  $b_n \notin S$ , 则  $S \subseteq V(P_m \vee \overline{K_n}) - \{b_n\}$ 。因  $V(P_m \vee \overline{K_n}) - \{b_n\}$  是一个凸集, 于是  $I_h(S) \neq V$ , 这与  $S$  是一个连通包集矛盾, 因此  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq S$ 。也注意到  $S$  诱导的子图是连通的且  $m=2$ , 可知  $S = \{a_1, b_1, b_2, \dots, b_n\}$  或  $\{a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 。现在考虑集合  $S' = \{a_1, b_1, b_2, \dots, b_n\}$  容易看出  $I[S'] = \{a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , 于是根据注 1 可知  $I_h(S') = \{a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, b_n\} = V(P_m \vee \overline{K_n})$ , 即  $S'$  是  $P_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集。于是在这种情况下,  $h_c(P_m \vee \overline{K_n}) = n+1$ , 定理成立。

#### 情况 3 $m \geq 3$ 且 $n=1$

令  $S$  是  $P_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集, 且  $\{a_1, a_m\} \subseteq S$ 。事实上, 如果  $a_1 \notin S$ , 则  $S \subseteq V(P_m \vee \overline{K_n}) - \{a_1\}$  且  $V(P_m \vee \overline{K_n}) - \{a_1\}$  是一个凸集, 即  $I_h(S) = V(P_m \vee \overline{K_n})$ , 这与  $S$  是一个包集矛盾, 于是  $a_1 \in S$ 。同理可知  $a_m \in S$ , 即  $\{a_1, a_m\} \subseteq S$ 。接下来证明: 若  $m \geq 3$ , 在  $\{a_2, a_3, \dots, a_{m-1}\}$  中, 不可能存在两个具有连续下标的元素同时不属于  $S$ 。

如果  $m=3$ , 则结论显然成立。下面可设  $m \geq 4$ 。

反证, 如果这样的元素存在, 不妨设  $a_2, a_3 \notin S$ 。注意在  $S$  中, 任意两个顶点的距离为 1 或 2。因此  $S \subseteq V(P_m \vee \overline{K_n}) - \{a_2, a_3\}$  且  $V(P_m \vee \overline{K_n}) - \{a_2, a_3\}$  是一个凸集, 这与  $S$  是一个包集矛盾。于是在  $\{a_2, a_3, \dots, a_{m-1}\}$  中, 不可能存在两个具有连续下标的元素同时不属于  $S$ 。

现在假设  $b_1 \notin S$ 。由于  $S$  诱导的子图是连通的, 且  $\{a_1, a_m\} \subseteq S$ , 则  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 。容易验证  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  是  $P_m \vee \overline{K_n}$  的连通包集合。再假设  $b_1 \in S$ 。为了使得集合  $S$  的基数最小, 根据排列组合知识可知

$$S = \begin{cases} \{b_1, a_1, a_3, a_5, \dots, a_m\}, & \text{若 } m \text{ 是奇数,} \\ \{b_1, a_1, a_3, a_5, \dots, a_{m-1}, a_m\}, & \text{若 } m \text{ 是偶数} \end{cases}$$

即  $|S| = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2$ 。容易验证  $I[S] = V(P_m \vee \overline{K_n})$ , 即

上式中表示的集合确实是  $P_m \vee \overline{K_n}$  的连通包集合。

结合上面两种可能, 可知在这种情况下,

$$h_c(P_m \vee \overline{K_n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2.$$

#### 情况 4 $m \geq 3$ 且 $n \geq 2$

在该情况下观察可知  $h_c(P_m \vee \overline{K_n}) \geq 3$ 。设  $S = \{a_1, b_1, b_2\}$ , 下证  $S$  是  $P_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集。因此时由  $S$  诱导的子图是连通的且  $I[S] = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2\}$ 。如果  $n=2$ , 则  $I[S] = V(P_m \vee \overline{K_n})$ , 且  $I_h(S) = V(P_m \vee \overline{K_n})$ , 因此  $S$  是  $P_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集, 即  $h_c(P_m \vee \overline{K_n}) = 3$ 。下设  $n \geq 3$ 。明显  $I[S] = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2\}$  不是凸集, 于是根据注 1 可知,  $I[S] = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2\} \subseteq I_h(S)$ , 而  $I_h(S)$  是一个凸集且  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq I[\{a_1, a_3\}]$ 。因此  $I_h(S) = V(P_m \vee \overline{K_n})$ , 即  $S$  是  $P_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集, 这蕴涵出  $h_c(P_m \vee \overline{K_n}) = 3$ 。

## 定理 2.4

$$h_c(C_m \vee \overline{K_n}) = \begin{cases} n+1, & \text{当 } m=1 \text{ 且 } n \geq 1; \\ n+1, & \text{当 } m=2 \text{ 且 } n \geq 2; \\ 4, & \text{当 } m=3 \text{ 且 } n=1; \\ n+1, & \text{当 } m=3 \text{ 且 } n \geq 3; \\ \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1, & \text{当 } m \geq 4 \text{ 且 } n=1; \\ 3, & \text{其它。} \end{cases}$$

**证明** 对  $C_m \vee \overline{K_n}$  的两部分  $C_m$  和  $\overline{K_n}$  的顶点进行标记, 假设

$$V(C_m) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, \quad V(\overline{K_n}) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

如果  $m=1$ , 则  $C_m \vee \overline{K_n}$  是星图, 由文献[6]的定理 2.5 可知  $h_c(C_m \vee \overline{K_n}) = n+1$ 。

如果  $m=2$ , 则  $C_m \vee \overline{K_n} \cong P_m \vee \overline{K_n}$ , 根据定理 2.3 可知结论成立。

下面考虑两种情况:

情况 1  $m \geq 3$  且  $n=1$ 

如果  $m=3$ , 则  $C_3 \vee \overline{K_1} \cong K_4$ ,  $h_c(C_m \vee \overline{K_n}) = 4$ 。下设  $m \geq 4$ 。令  $S$  是  $C_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集, 且在  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  中, 不可能存在两个具有连续下标的元素同时不属于  $S$ 。反证, 如果这样的两个元素存在, 不失一般性, 可设  $a_1, a_2 \notin S$ 。在  $S$  中, 任意两个顶点的距离为 1 或 2。因此  $S \subseteq V(C_m \vee \overline{K_n}) - \{a_1, a_2\}$  且  $V(C_m \vee \overline{K_n}) - \{a_1, a_2\}$  是一个凸集, 这与  $S$  是一个连通包集矛盾。于是在  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  中, 不可能存在两个具有连续下标的元素同时不属于  $S$ 。

如果  $b_1 \notin S$ 。因为  $S$  诱导的子图连通, 则有  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  或  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} - \{a_i\}$ , 其中  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 。不论那种情况发生, 都容易验证  $I[S] = V(C_m \vee \overline{K_n})$ , 即  $S$  均是  $C_m \vee \overline{K_n}$  的连通包集。如果  $b_1 \in S$ 。为了使得集合  $S$  的元素个数最少, 根据排列组合知识可知

$$S = \begin{cases} \{b_1, a_1, a_3, a_5, \dots, a_m\}, & \text{若 } m \text{ 是奇数,} \\ \{b_1, a_1, a_3, a_5, \dots, a_{m-1}\}, & \text{若 } m \text{ 是偶数} \end{cases}$$

即  $|S| = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1$ 。现在容易得  $I[S] = V(C_m \vee \overline{K_n})$ ,

即上式中表示的集合确实是  $C_m \vee \overline{K_n}$  的连通包集合。

结合上面两种可能, 可知  $h_c(P_m \vee \overline{K_n}) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1$ 。

情况 2  $m \geq 3$  且  $n \geq 2$ 

观察  $h_c(C_m \vee \overline{K_n}) \geq 3$ 。令  $S = \{a_1, b_1, b_2\}$ , 首先考虑  $m=3$ 。如果  $n=2$ , 则显然有  $I[S] = V(C_m \vee \overline{K_n})$ , 于是  $S$  是  $C_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集, 即  $h_c(C_m \vee \overline{K_n}) = 3$ 。下设  $n \geq 3$ 。因为  $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, \dots, b_n\} - \{b_i\}$  是一个凸集, 其中  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 故  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  包含于每一个连通包集。注意到此时的连通包集诱导的子图是连通的, 于是具有最小基数的连通包集只可能是  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \cup \{a_j\}$ , 其中  $j \in \{1, 2, 3\}$ 。事实上, 容易验证  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \cup \{a_j\}$  是  $C_m \vee \overline{K_n}$  的连通包集, 即在这种情况下有  $h_c(C_m \vee \overline{K_n}) = n+1$ 。

接下来考虑  $m \geq 4$ , 只需证  $S$  是  $C_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集。显然由  $S$  诱导的子图是连通的且  $I[S] = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2\}$ 。如果  $n=2$ , 则  $I[S] = V(C_m \vee \overline{K_n})$  且  $I_h(S) = V(C_m \vee \overline{K_n})$ , 因此  $S$  是  $C_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集, 得证。如果  $n \geq 3$ , 由于  $b_3 \in I[\{a_1, a_3\}]$ , 则  $I[S]$  不是凸集。另外, 因为  $I_h(S)$  是一个凸集且  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq I[\{a_1, a_3\}]$ , 由注 1 可知,  $I_h(S) = V(C_m \vee \overline{K_n})$ , 即  $S$  是  $P_m \vee \overline{K_n}$  的一个连通包集。

## 参考文献:

- [1] Tong L D. The forcing hull and forcing geodetic numbers of graphs[J]. Discrete Applied Math., 2009, 157:1159-1163.
- [2] Chartrand G, Harary F, Zhang P. Geodetic sets in graphs[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2000, 20(2):129-138.
- [3] Chartrand G, Zhang P. The forcing geodetic number of a graph[J]. Discuss. Math. Graph Theory, 1999, 19(1): 45-58.
- [4] Everitt M G, Seidman S B. The hull number of a graph[J]. Discrete Math., 1985, 57: 217-223.

(下转第 14 页)

- [2] Bermond J C, Schonhei M J. G-decomposition of  $K_n$ , where  $G$  has four vertices or less[J]. Discrete Math., 1977, 19: 113-120.
- [3] Bermond J C, Huang C, Rosa A, et al. Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices[J]. Ars Combinatorics, 1980, 10: 293-318.
- [4] Yamamoto S, Ikeda H, Shige-eda S, et al. On claw-decomposition of complete graphs and complete bipartite graphs [J]. Hiroshima Math. J., 1975, 5: 33-42.
- [5] Abueida Atif A, Daven Mike. Multidesign for graph-pairs of order 4 and 5[J]. Graphs and Combinatorics, 2003, 19(4): 433-447.
- [6] He Q F. Study on paths and stars of several classes of graphs decomposed into edge inequalities[D]. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2019.
- [7] Hou N C. Path and star decomposition of complete graphs[D]. Shanghai: East China Normal University, 2022.
- [8] Ilayaraja M, Sowndhariya K, Muthusamy A. Decomposition of product graphs into paths and stars on five vertices[J]. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 2020, 17(3): 1-7.
- [9] Daniel Horsley, Rosalind A Hoyte. Decomposing  $K_{n+m}-K_n$  into cycles of prescribed lengths[J]. Discrete Mathematics, 2017, 340(8): 1818-1843.
- [10] Jeevados S, Muthusamy A. Decomposition of complete bipartite graphs into paths and cycles[J]. Discrete Mathematics, 2014(331): 98-108.
- [11] Shyu Tay Woei. Decomposition of complete graphs into cycles and stars[J]. Graphs and Combinatorics, 2013(2): 301-313.
- [12] Shyu Tay Woei. Decomposition of complete bipartite graphs into paths and stars with same number of edges[J]. Discrete Mathematics, 2012(7): 865-871.
- [13] Tay-Woei Shyu. Decomposition of complete graphs into paths and stars[J]. Discrete Mathematics, 2010(15-1): 2164-2169.
- [14] Benjamin R S. Decomposing complete equipartite graphs into cycles of length  $2p$ [J]. Journal of Combinatorial Designs, 2008 (3): 244-252.
- [15] 顾成扬. 完全图  $K_n$  和完全多部图  $K_n(t)$  的  $\{C_3, S_4\}$ -分解强制分解[J]. 淮阴师范学院学报: 自然科学版, 2002, 1(3): 6-9.
- [16] 顾成扬. 完全图  $K_n$  的  $\{P_4, S_4, C_4\}$ -分解[J]. 华侨大学学报, 2005, 26(2): 222-224.
- [17] 顾成扬. 完全图  $K_n$  分解成五个顶点的星和圈[J]. 淮阴师范学院学报: 自然科学版, 2007, 6(1): 14-16.
- [18] 彩春丽, 陶黄林, 彭嘉昊. 围长至少为 5 的平面的线性着色[J]. 井冈山大学学报: 自然科学版, 2021, 42(3): 8-11, 19.

(上接第 10 页)

- [5] John J, Mary G V. The connected hull number of a graph[J]. South Asian Journal of Mathematics, 2012, 2(5): 512-520.
- [6] 马僇龙, 金剑行, 钟国. 一些简单有限连通图的连通包数[J]. 黄冈师范学院学报: 自然科学版, 2013, 33(3): 14-18.
- [7] 彩春丽, 易华. 最大度较小的图的线性着色[J]. 井冈山大学学报: 自然科学版, 2020, 41(5): 5-9.
- [8] 彩春丽, 陶黄林, 彭嘉昊. 围长至少为 5 的平面图的线性着色[J]. 井冈山大学学报: 自然科学版, 2021, 42(3): 8-11, 19.
- [9] 蔡学鹏, 任佰通, 冯苗苗. 图的邻点强可区别  $V$ -全色数的一个上界[J]. 井冈山大学学报: 自然科学版, 2018, 39(3): 5-8.
- [10] 严政, 赵小鹏, 慈永鑫. 图的最小度和无矛盾连通数[J]. 长江大学学报: 自然科学版, 2022, 19(2): 113-118.
- [11] 李雨欣, 苏贵福. 最大度至多为 3 的图上极大分离集的最大数目[J]. 北京化工大学学报: 自然科学版, 2022, 49(3): 102-107.
- [12] 余桂东, 袁慧, 张子杰. 带有最小度的哈密尔顿图的充分条件[J]. 安徽理工大学学报: 自然科学版, 2022, 42(5): 71-74.
- [13] 金剑行, 邓天炎, 马僇龙. 有关连通图的连通包数的一些结果[J]. 广西师范学院学报: 自然科学版, 2013, 30(1): 4-8.
- [14] 郭梦夏, 邓天炎, 金剑行, 等. 蛛网图的连通包数[J]. 广西师范学院学报: 自然科学版, 2013, 30(4): 28-31.