文章编号：1674-8085(2018)05-0013-04

分裂四元数矩阵方程 $AX+XB=C$ 的反 Hermite 解

李明照，*袁仕芳，田　勇

（五邑大学数学与计算科学学院，广东，江门 529020）

摘　要：针对分裂四元数矩阵 A，B 和 C，研究矩阵方程 $AX+XB=C$ 的反 Hermite 解存在的充分必要条件以及有解时的通解表达式。本文利用 Kronecker 积，矩阵列拉直算子以及 Moore-Penrose 广义逆和分裂四元数矩阵的复表示。

关键词：分裂四元数矩阵；矩阵方程；矩阵列拉直算子；Moore-Penrose 广义逆

中图分类号：O241.2　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2018.05.003

ON ANTI-HERMITIAN SOLUTIONS OF THE SPLIT QUATERNION MATRIX EQUATION $AX+XB=C$

LI Ming-zhao，* YUAN Shi-fang，TIAN Yong

(School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen, Guangdong 529020, China)

Abstract: For split quaternion matrices A, B, C we study the necessary and sufficient condition for anti-Hermitian solutions and the general solution expression to split quaternion matrix equation $AX+XB=C$ Our tools are the Kronecker product, vec-operator, Moore-Penrose generalized inverse, and the complex representation matrix of split quaternion matrices.

Key words: split quaternion matrices; matrix equation; vec-operator; Moore-Penrose generalized inverse

0　引言

本文引用如下符号：

$R^{m\times n}$	$m\times n$ 阶实矩阵集合
$C^{m\times n}$	$m\times n$ 阶复矩阵集合
$SR^{n\times n}$	$n\times n$ 阶实对称矩阵集合
$ASR^{n\times n}$	$n\times n$ 阶实反对称矩阵集合
Q_S	分裂四元数矩阵集合
Q_S^n	n 维分裂四元数列向量集合
$Q_S^{m\times n}$	$m\times n$ 阶分裂四元数矩阵集合
$AHQ_S^{n\times n}$	$n\times n$ 阶反 Hermite 分裂四元数矩阵集合
$\mathrm{Re}(A)$	复矩阵 A 的实部
$\mathrm{Im}(A)$	复矩阵 A 的虚部
$\overline{A}$	分裂四元数矩阵的共轭矩阵
A^T	分裂四元数矩阵的转置矩阵
A^H	分裂四元数矩阵的共轭转置矩阵
I_n	n 阶单位矩阵
$0_{m\times n}$	$m\times n$ 阶零矩阵
A^+	实矩阵 A 的 Moorse-Penrose 广义逆

许多学者一直致力四元数矩阵和四元数矩阵方程[1-4]，分裂四元数矩阵和分裂四元数矩阵方程的

收稿日期：2018-07-05；修改日期：2018-07-20
基金项目：广东省自然科学基金项目(2015A030313646)
作者简介：李明照(1988-)，男，广东新会人，硕士生，主要从事数值代数研究(E-mail:wuyilimingzhao@126.com);
*袁仕芳(1972-)，男，湖南邵阳人，教授，博士，主要从事矩阵论和数值代数研究(E-mail:yuanshifang305@163.com);
田　勇(1991-)，男，贵州遵义人，硕士生，主要从事数值代数研究研究(E-mail:zytianyong@163.com).

研究，并且取得重要成果[5-10]。国内学者王茂香等[9]研究了分裂四元数线性方程组的 Cramer 法则，赵琨等[10]研究分裂四元数矩阵方程 $A\tilde{X}+XB=C$ 的解。袁仕芳等[8]利用分裂四元数矩阵的复表示，Kronecker 积，列拉直算子以及 Moore-Penrose 广义逆，研究分裂四元数矩阵方程 $AXB+CXD=E$ 的 Hermite 解存在的充分必要条件以及有解时的通解表达式。我们在此基础上，讨论分裂四元数矩阵方程

$$AX+XB=C \tag{1}$$

的反 Hermite 解，其中 $A,B,C,X\in Q_S^{n\times n}$，$X^H=-X$。

令 R 表示实数空间，$Q_S=R\oplus Ri\oplus Rj\oplus Rk$ 表示分裂四元数空间，其中，$\oplus$ 表示空间的直和，$i^2=-j^2=-k^2=-1$，$ij=-ji=k$，$jk=-kj=-i$，$ki=-ik=j$. 显然，$Q_S=C\oplus Cj$，其中 C 表示复数空间。对于 $A=A_1+A_2j\in Q_S^{m\times n}$，其中 A_1，$A_2\in C^{m\times n}$，有

$$A=\mathrm{Re}(A_1)+\mathrm{Im}(A_1)i+\mathrm{Re}(A_2)j+\mathrm{Im}(A_2)k, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{Re}(A_1)$，$\mathrm{Im}(A_1)$，$\mathrm{Re}(A_2)$，$\mathrm{Im}(A_2)\in R^{m\times n}$ A 的共轭矩阵，转置矩阵和共轭转置矩阵可表示为

$$\overline{A}=\mathrm{Re}(A_1)-\mathrm{Im}(A_1)i-\mathrm{Re}(A_2)j-\mathrm{Im}(A_2)k=\overline{A_1}-A_2j,$$

$$A^T=\mathrm{Re}(A_1)^T+\mathrm{Im}(A_1)^Ti+\mathrm{Re}(A_2)^Tj+\mathrm{Im}(A_2)^Tk=A_1^T-A_2^Tj,$$

$$A^H=\mathrm{Re}(A_1)^T-\mathrm{Im}(A_1)^Ti-\mathrm{Re}(A_2)^Tj-\mathrm{Im}(A_2)^Tk=A_1^H-A_2^Tj$$

分裂四元数矩阵 A 的复表示矩阵是

$$f(A)=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ \overline{A_2} & \overline{A_1}\end{pmatrix}\in C^{2m\times 2n}. \tag{3}$$

对于 $A=(a_{ij})\in Q_S^{m\times n}$，$B\in Q_S^{p\times s}$，有 $f(AB)=f(A)f(B)$，$A\otimes B=(a_{ij}B)\in Q_S^{mp\times ns}$ 是矩阵 A 与矩阵 B 的 Kronecker 积。对于 $A=(a_{ij})\in Q_S^{m\times n}$，$vec(A)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 是矩阵 A 的列拉直算子，其中 $a_j=a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})$，$(j=1,2,\cdots n)$。$(\overline{A})^T=\overline{(A^T)}$，$(AB)^H=B^HA^H$。

分裂四元数不满足乘法交换律，所以不能把复数矩阵成立的性质直接推广到分裂四元数矩阵。对于 $A=A_1+A_2j\in Q_S^{m\times n}$，$A_1$，$A_2\in C^{m\times n}$，记

$$\Phi_A=(A_1,A_2). \tag{4}$$

设 l 是一个实数，$A,B\in Q_S^{m\times n}$，$C\in Q_S^{n\times t}$，有

(i) $A=B\Leftrightarrow \Phi_A=\Phi_B$,

(ii) $\Phi_{A+B}=\Phi_A+\Phi_B$,

(iii) $\Phi_{lA}=l\Phi_A$,

(iv) $\Phi_{AC}=\Phi_A f(C)$。

1 几个引理和定义

现在讨论 $vec(AXB)$ 和 $vec(\Phi_{AXB})$，记

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}vec(\mathrm{Re}(A_1))\\ vec(\mathrm{Im}(A_1))\\ vec(\mathrm{Re}(A_2))\\ vec(\mathrm{Im}(A_2))\end{pmatrix} \tag{5}$$

引理 1[8] 设 $A=A_1+A_2j\in Q_S^{m\times n}$，$X=X_1+X_2j\in Q_S^{n\times s}$，$B=B_1+B_2j\in Q_S^{s\times t}$，其中 $A_1,A_2\in C^{m\times n}$，$X_1,X_2\in C^{n\times s}$，$B_1,B_2\in C^{s\times t}$，有

$$vec(\Phi_{AXB})=(f(B)^T\otimes A_1, f(Bj)^H\otimes A_2)\begin{pmatrix}vec(\Phi_x)\\ vec(\Phi_{jxj})\end{pmatrix}$$ 或

$$vec(\Phi_{AXB})=\left[\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ \overline{B_2} & \overline{B_1}\end{pmatrix}^T\otimes A_1,\begin{pmatrix}B_2 & B_1\\ \overline{B_1} & \overline{B_2}\end{pmatrix}^H\otimes A_2\right]\begin{pmatrix}vec(\Phi_X)\\ vec(\Phi_{jXj})\end{pmatrix} \tag{6}$$

定义 1 设 $A=(a_{ij})\in Q_S^{n\times n}$，$a_1=(a_{11},\sqrt{2}a_{21},\cdots,\sqrt{2}a_{n1}$，$a_{n-1}=(a_{(n-1)(n-1)},\sqrt{2}a_{n(n-1)})$，$a_n=a_{nn}$，则

$$vec_s(A)=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n)^T\in Q_S^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{7}$$

定义 2 设 $B=(b_{ij})\in Q_S^{n\times n}$，设 $b_1=(b_{21},b_{31},\cdots,a_{n1})$，$b_2=(b_{32},b_{42},\cdots,b_{n2}),\cdots,b_{n-2}=(b_{(n-1)(n-2)},b_{n(n-2)})$，$b_{n-1}=(b_{n(n-1)})$，则

$$vec_A(A)=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n)^T\in Q_S^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{8}$$

引理 2[8] 设 $X\in R^{n\times n}$，则

(i) $X\in SR^{n\times n}\Leftrightarrow vec(X)=K_S vec_S(X)$, (9)

其中 $K_S\in R^{n^2\times\frac{n(n+1)}{2}}$ 且

$K_S=$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} & e_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{2}e_2 & e_3 & \cdots & e_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sqrt{2}e_{n-1} & e_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e_1 & 0 & 0 & \cdots & e_2 & \cdots & 0 & e_{n-1} & \sqrt{2}e_n \end{pmatrix},$$

e_i 是第 i 个分量为1，其余分量为0的列向量。

(ii) $X \in ASR^{n\times n} \Leftrightarrow vec(X)=K_A vec_A(X)$, (10)

其中 $K_A \in R^{n^2\times\frac{n(n-1)}{2}}$ 且

$$K_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e_2 & e_3 & \cdots & e_{n-1} & e_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_3 & \cdots & e_{n-1} & e_n & \cdots & 0 \\ 0 & -e_1 & \cdots & 0 & 0 & -e_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -e_1 & 0 & 0 & \cdots & -e_2 & 0 & \cdots & e_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -e_1 & 0 & \cdots & 0 & -e_2 & \cdots & -e_{n-1} \end{pmatrix}.$$

引理 3 对于 $X=X_1+X_2 j\in Q_S^{n\times n}$，$X_1$，$X_2\in C^{n\times n}$，有

$$X\in AHQ_S^{n\times n} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(X_1)^T=-\mathrm{Re}(X_1), \mathrm{Im}(X_1)^T=\mathrm{Im}(X_1), \\ \mathrm{Re}(X_2)^T=\mathrm{Re}(X_2), \mathrm{Im}(X_2)^T=\mathrm{Im}(X_2). \end{cases} \tag{11}$$

证明

$X\in AHQ_S^{n\times n}$

$\Leftrightarrow X^H=-X$

$\Leftrightarrow (X_1+X_2 j)^H=-(X_1+X_2 j)$

$\Leftrightarrow (\mathrm{Re}(X_1)+\mathrm{Im}(X_1)i+\mathrm{Re}(X_2)j+\mathrm{Im}(X_2)k)^H=$
$-(\mathrm{Re}(X_1)+\mathrm{Im}(X_1)i+\mathrm{Re}(X_2)j+\mathrm{Im}(X_2)k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(X_1)^T=-\mathrm{Re}(X_1), \mathrm{Im}(X_1)^T=\mathrm{Im}(X_1), \\ \mathrm{Re}(X_2)^T=\mathrm{Re}(X_2), \mathrm{Im}(X_2)^T=\mathrm{Im}(X_2). \end{cases}$$

即 $\mathrm{Re}(X_1)$ 是反对称矩阵，$\mathrm{Im}(X_1)$，$\mathrm{Re}(X_2)$，$\mathrm{Im}(X_2)$ 是对称矩阵。

设 $W=\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$,

$$W_1=\begin{pmatrix} K_A & iK_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_S & iK_S \end{pmatrix},$$

$$W_2=\begin{pmatrix} K_A & -iK_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_S & -iK_S \end{pmatrix},$$

由文献[8]引理 2.6，有以下结果：

引理 4 对于 $X=X_1+X_2 j\in AHQ_S^{n\times n}$，则

$$\begin{pmatrix} vec(\Phi_X) \\ vec(\Phi_{jXj}) \end{pmatrix}=W\begin{pmatrix} vec_A(\mathrm{Re}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(X_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_2)) \end{pmatrix}。 \tag{12}$$

证明 设 $X=X_1+X_2 j\in AHQ_S^{n\times n}$，有

$$\begin{pmatrix} vec(\Phi_X) \\ vec(\Phi_{jXj}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} vec(X_1) \\ vec(X_2) \\ vec(\overline{X_1}) \\ vec(\overline{X_2}) \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} vec(\mathrm{Re}(X_1))+ivec(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec(\mathrm{Re}(X_2))+ivec(\mathrm{Im}(X_2)) \\ vec(\mathrm{Re}(X_1))-ivec(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec(\mathrm{Re}(X_2))-ivec(\mathrm{Im}(X_2)) \end{pmatrix}=$$

$$W\begin{pmatrix} vec_A(\mathrm{Re}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(X_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_2)) \end{pmatrix}$$

引理 5[8] 设 $A=A_1+A_2 j\in Q_S^{m\times n}$，$X=X_1+X_2 j\in AHQ_S^{n\times s}$，$B=B_1+B_2 j\in Q_S^{s\times t}$，其中 $A_1,A_2\in C^{m\times n}$，$X_1,X_2\in C^{n\times s}$，$B_1,B_2\in C^{s\times t}$有

$$vec(\Phi_{AXB})=(f(B)^T\otimes A_1, f(Bj)^H\otimes A_2)\, W\begin{pmatrix} vec_A(\mathrm{Re}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(X_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_2)) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

2 矩阵方程(1)的解

基于前面讨论，再求解矩阵方程(1)。设

$$P=\left(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\otimes A_1\right)W_1+\left(\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\otimes A_2\right)W_2+$$
$$\left(\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix}^T\otimes I_n\right)W_1,$$

$$P_1=\mathrm{Re}(P),\ P_2=\mathrm{Im}(P),\ e=\begin{pmatrix} vec(\mathrm{Re}(C_1)) \\ vec(\mathrm{Im}(C_1)) \\ vec(\mathrm{Re}(C_2)) \\ vec(\mathrm{Im}(C_2)) \end{pmatrix}。 \tag{14}$$

引理 6[11] 对于 $A\in R^{m\times n}$，$b\in R^{n}$，则矩阵方程 $Ax=b$ 有解的充要条件是：

$$AA^{+}b=b, \tag{15}$$

当有解时，它的通解可以表示为

$$x=A^{+}b+(I_n-A^{+}A)y, \tag{16}$$

其中 $y\in R^{n}$ 是一个任意的向量。当 $rank(A)=n$ 时，$x=A^{+}b$ 是方程 $Ax=b$ 的唯一解。

引理 7 对于 $A,B,C\in Q_S^{n\times n}$，$X\in AHQ_S^{n\times n}$，$M=diag(K_A,K_S,K_S,K_S)$，$K_s\in R^{n^2\times\frac{n(n+1)}{2}}$ 如（9）所示，$K_A\in R^{n^2\times\frac{n(n-1)}{2}}$ 如（10）所示。则方程(1)有反 Hermite 解的充要条件是

$$\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}e=e. \tag{17}$$

在有解的条件下，记方程(1)的解集合为 AH_E，则

$$AH_E=\left\{X\left|\overrightarrow{X}=M\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}e+M\left(I_{2n^2+n}-\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}\right)y\right.\right\} \tag{18}$$

y 为适当阶数的实向量。进一步，当

$$rank\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}=2n^2+n, \tag{19}$$

$$AH_E=\left\{X\left|\overrightarrow{X}=M\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}e\right.\right\}。 \tag{20}$$

证明 矩阵方程(1)可变为

$$AX+XB=C\Leftrightarrow\Phi_{AX}+\Phi_{XB}=\Phi_C$$

$$\Phi_C\quad\Leftrightarrow P\begin{pmatrix}vec_A(\mathrm{Re}(X_1))\\vec_s(\mathrm{Im}(X_1))\\vec_s(\mathrm{Re}(X_2))\\vec_s(\mathrm{Im}(X_2))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}vec(C_1)\\vec(C_2)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}vec(C_1)\\vec(C_2)\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}vec_A(\mathrm{Re}(X_1))\\vec_s(\mathrm{Im}(X_1))\\vec_s(\mathrm{Re}(X_2))\\vec_s(\mathrm{Im}(X_2))\end{pmatrix}=e.$$

由引理 7 有

$$\begin{pmatrix}vec_A(\mathrm{Re}(X_1))\\vec_s(\mathrm{Im}(X_1))\\vec_s(\mathrm{Re}(X_2))\\vec_s(\mathrm{Im}(X_2))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}e+\left(I_{2n^2+n}-\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}\right)y,$$

$$\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}vec(\mathrm{Re}(X_1))\\vec(\mathrm{Im}(X_1))\\vec(\mathrm{Re}(X_2))\\vec(\mathrm{Im}(X_2))\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}vec_A(\mathrm{Re}(X_1))\\vec_s(\mathrm{Im}(X_1))\\vec_s(\mathrm{Re}(X_2))\\vec_s(\mathrm{Im}(X_2))\end{pmatrix}=$$

$$M\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}e+M\left(I_{2n^2+n}-\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}\right)y.$$

当 $rank\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}=2n^2+n$，得到

$$\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}=I_{2n^2+n},$$

故 $AH_E=\left\{X\left|\overrightarrow{X}=M\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}^{+}e\right.\right\}$。

参考文献：

[1] Huang L P. The matrix equation AXB + CXD = E over the quaternion field[J]. Linear Algebra Appl.,1996,234: 197-208.

[2] Yuan S F, Liao A P, Lei Y. Least squares Hermitian solution of the matrix equation (AXB,CXD) = (E,F) with the least norm over the skew field of quaternions[J]. Math. Comput. Model., 2008,48:91-100.

[3] Yuan S F, Liao A P. Least squares Hermitian solution of the complex matrix equation *AXB+CYD=E* with the least norm[J].Journal of the Franklin Institute,2014,351: 4978-4997.

[4] Zhang F, Wei M, Li Y, et al. Special least squares solutions of the quaternion matrix equation AXB + CXD = E[J]. Comput. Math. Applic.,2016,72(5):1426-1435.

[5] Alagöz Y, Oral K H, Yüce S. Split quaternion matrices[J]. Miskolc Mathematical Notes., 2012,13:223-232.

[6] Erdögdu M, Özdemir M. On complex split quaternion matrices[J]. Adv. Appl.Clifford Algebras.,2013,23:625-638.

[7] Erdögdu M, Özdemir M. Two-sided linear split quaternionic equations with unknowns[J]. Linear Multilinear Algebra., 2015,63 (1):97-106.

[8] Yuan S F, Wang Q W, Yu Y B, et al.On Hermitian solutions of the split quaternion matrix equation AXB+CXD=E[J].Advances in Applied Clifford Algebras., 2017,27:3235-3252.

[9] 茂香,姜同松,张兆忠. 分裂四元数线性方程组的 Cramer 法则[J].泰山学院学报,2016,38(6):37-41.

[10] 赵琨,张兆忠,王茂香. 分裂四元数矩阵方程 $A\tilde{X}+XB=C$ 的解[J].菏泽学院学报,2016,38(5): 18-23.

[11] 戴华. 矩阵论[M].北京:科学出版社,2001.