文章编号：1674-8085(2018)05-0001-06

模糊等价关系下的犹豫模糊粗糙集及其应用

*齐　爽，王艳平

（辽宁工业大学理学院，辽宁，锦州 121001）

摘　要：首先通过对长度不同的犹豫模糊元进行补齐来定义犹豫模糊集新的交并运算，在 Pawlak 近似空间中利用新的运算建立粗糙犹豫模糊集模型；然后将 Pawlak 近似空间推广到一般犹豫模糊近似空间，利用犹豫模糊元间的相似度获得犹豫模糊近似空间中对象间的模糊关系矩阵，再利用模糊集的传递闭包法将模糊相似矩阵转化成模糊等价矩阵，在此基础上建立犹豫模糊信息系统中的粗糙集模型，研究犹豫模糊信息系统的属性约简。最后通过一个算例来说明犹豫模糊信息系统的属性约简方法。

关键词：犹豫模糊集；粗糙犹豫模糊集；犹豫模糊粗糙集；属性约简

中图分类号：O159　　**文献标识码：**A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2018.05.001

HESITANT FUZZY ROUGH SET BASED ON SIMILARITY AND ITS APPLICATION

* QI Shuang, WANG Yan-ping

(Science College, Liaoning University of Technology, Jinzhou, Liaoning 121001, China)

Abstract: Firstly, the hesitant fuzzy sets with different lengths are complemented to define the new intersection operation of hesitant fuzzy sets. The new operation is used to establish the rough hesitant fuzzy set model in Pawlak approximation space. Furthermore, the Pawlak approximation space is extended to the general hesitant fuzzy approximation Space, using the similarity between hesitant fuzzy elements to obtain the fuzzy relation matrix between objects in hesitant fuzzy approximation space, and then transform the fuzzy similar matrix into fuzzy equivalent matrix by using the transitive closure method of fuzzy set, and establish a rough set model in hesitant fuzzy information system on this basis to study the attribute reduction of hesitant fuzzy information systems. And an example is given to illustrate the attribute reduction method of hesitant fuzzy information system.

Key words: hesitant fuzzy sets; rough hesitant fuzzy sets; hesitant fuzzy rough sets; attribute reduction

0　引言

自 1965 年，Zadeh 提出模糊集理论[1]以来，模糊集得到了相当广泛的推广。例如，K.Atanassov 提出了作为模糊集扩展形式的直觉模糊集[2]；之后 Atanassov 和 Gargov 在直觉模糊集的基础上提出区间直觉模糊集[3]的概念等。但是，当遇到模糊性较高的实际问题时，就很难在多个可能值中选出恰当的值作为隶属度（或非隶属度）。这时，模糊集、直觉模糊集以及区间值模糊集等概念就不能合理地进行表述。为了更加客观的表达人们在决策时的犹豫程度，Torra 在 2010 年引入了犹豫模糊集[4]的概念，对于决策中的不确定性问题犹豫模糊集能更有效地进行刻画。

Zadeh 提出了相似关系[5]的概念，模糊集的相

收稿日期：2018-06-11；修改日期：2018-08-19

作者简介：*齐　爽(1993-)，女，辽宁阜新人，硕士生，主要从事粗糙集理论研究及其应用(Email:1842215880@qq.com);
王艳平(1965-)，女，辽宁锦州人，教授，硕士，硕士生导师，主要从事粗糙集理论研究及其应用(Email:44879633@qq.com).

似度被广泛应用在决策、聚类分析、机器学习、近似推理、模式识别等领域。Pappis 和 Karacapilidis 在 1995 年将模糊集合相似性度量应用到模糊关系方程[6]中；2005 年，袁修久、张文修对模糊粗糙集的包含度和相似度[7]进行研究；2015 年，林娟、米据生等定义了两种相似度量方法，并讨论了这两种度量方法之间的关系[8]。Pawlak 等人于 1982 年提出了粗糙集理论[9]，粗糙集理论是一种处理不完整和不确定性知识的重要数学工具，经典的粗糙集模型是基于等价关系对论域中的样本进行划分和聚类的，把属性相同的聚成一类。由于犹豫模糊信息系统中很难满足完全相同的属性值，因而经常采用的方法是用犹豫模糊值的相似度来对它们的等价程度进行刻画，为论域的划分提供度量的标准。但是利用模糊相似关系只能得到论域的覆盖，无法得到它的精确划分。文献[10]利用模糊关系的传递闭包对区间值模糊信息系统的建模进行了讨论，本文将此方法应用在犹豫模糊信息系统中，建立基于模糊等价关系的犹豫模糊粗糙集模型，讨论在给定相似水平下的分类约简与核的计算方法。

1 预备知识

首先回顾一下犹豫模糊集的一些基本概念。

定义1.1[4] 设 X 是一个非空集合，则称

$$E=\left\{\left\langle x,h_E(x)\right\rangle \middle| x\in X\right\}$$

为犹豫模糊集，其中 $h_E\left(x\right)$ 是 $\left[0,1\right]$ 上一些可能隶属值的集合，表示 X 中 x 对于 E 的隶属度的集合，称 $h=h_E\left(x\right)$ 为一个犹豫模糊元。为方便，将 X 上所有犹豫模糊集构成的集合记为 $HF(X)$。

定义1.2[11] 设 A 和 B 是论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的两个犹豫模糊集，将 A、B 之间的相似性测度定义为 $S(A/B)$，满足以下性质：

(1) $0\le S(A/B)\le 1$；

(2) $S(A/B)$=1，当且仅当 A=B；

(3) $S(A/B)$=$S(B/A)$。

Xu Zeshui [11]等为了在犹豫模糊集中引入距离和相似性测度，需要对两个犹豫模糊元进行比较。由于一般情况下两个犹豫模糊元所含数值个数不同，为此他们提出了数值延拓的方法使之相同。他们最先采取的是乐观或悲观的延拓方式，即用犹豫模糊元中的最大或最小值补齐长度较短的那一个，后又改进为0.5隶属度数值延拓法和η数值延拓法。可以看出，上述方法都存在一定的局限性。本文提出一种新的延拓方法，对应于乐观和悲观，我们可以称其为客观的，即用犹豫模糊元中所有隶属度可能值的平均值补齐其长度，平均值即犹豫模糊元的得分函数，得分函数可以记为 $s(h)=\frac{1}{l(h)}\sum_{\gamma\in h}\gamma$，其中 $l(h)$ 为犹豫模糊元 h 的长度。为了便于研究，本文记 $h_E(x)=\{h_E^1(x),h_E^2(x),\cdots,h_E^m(x)\}$，$h_E(x)$ 为犹豫模糊元，其中 $h_E^i(x)\in[0,1]$ 为对象 x 属于犹豫模糊集 E 的隶属度的一个可能值，而 $h_E(x)$ 为对象 x 属于犹豫模糊集 E 的隶属度可能值的集合。而且通常将 $h_E(x)$ 改记为 $h_E(x)=\{h_E^{\sigma(1)}(x),h_E^{\sigma(2)}(x),\cdots,h_E^{\sigma(m)}(x)\}$，其中 $\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(m)$ 为 $1,2,\cdots,m$ 的一个重新排列，将 $h_E^{\sigma(i)}(x)$ 按降序排列，即假设 $h_E^{\sigma(i)}(x)$ 为 $h_E(x)$ 中的第 i 个最大的数值。

根据文献[11]可得犹豫模糊集的相似度公式为：

$$s(A/B)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}\left|h_A^{\sigma(j)}(x_i)-h_B^{\sigma'(j)}(x_i)\right|\right] \tag{1.1}$$

相似度是描述两个集合之间的贴近程度的，由于犹豫模糊元都表现为集合的形式，所以也可以研究两个犹豫模糊元之间的相似度。利用上面给出的犹豫模糊集的公式，可以得到下面的犹豫模糊元的相似度公式：

$$s(h_A(x)/h_B(x))=1-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left|h_A^{\sigma(j)}(x)-h_B^{\sigma'(j)}(x)\right| \tag{1.2}$$

定义 1.3[10] 设 $HS=(U,A,V,f)$ 是一个信息系统，其中 U 是一非空有限对象集合称为论域，即 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是非空有限属性集合，V_a 表示属性 a 的值域，即 $V=\bigcup_{a\in A}V_a$，$f:U\times A\to V$ 称为信息函数，使得对每一 $a\in A$，$x\in U$，有 $f(x,a)\in V_a$ 是一犹豫模糊值，则称 HS 为犹豫模糊信息系统。

2 粗糙犹豫模糊集

正如文献[10]中指出的，Torra 的交、并运算不满足吸收律。这不但与经典模糊集合的情况不符，也与交、并运算的实际目标相违背。在各种信息系统中，我们通常将给定的信息集合看成信息粒。那么在犹豫模糊信息系统中，若将每个犹豫模糊集看成是一个知识粒，我们希望通过交、并运算实现信息粒的细化与泛化，这样，Torra 的交、并运算就无法满足。为此，本文给出新的犹豫模糊集的交、并运算。利用上节提出的新的延拓方法，即用犹豫模糊元中所有隶属度可能值的平均值补齐其长度，可以先将两个犹豫模糊元通过数值延拓使其含有元素个数相等，在此基础上再进行犹豫模糊元以及犹豫模糊集的运算。

设 $h_A(x)=\{h_A^{\sigma(1)}(x),h_A^{\sigma(2)}(x),\cdots,h_A^{\sigma(p)}(x)\}$，$h_B(x)=\{h_B^{\sigma'(1)}(x),h_B^{\sigma'(2)}(x),\cdots,h_B^{\sigma'(q)}(x)\}$ 为任意的两个犹豫模糊元，其中 $l(h_A(x))=p$，$l(h_B(x))=q$ 分别为两个犹豫模糊元的长度，即它们中包含的元素个数。记 $l=\max\{p,q\}$，用本文所提出的延拓方式补齐较短的犹豫模糊元长度。在此基础上，定义犹豫模糊元新的交、并运算如下：

定义 2.1 设 $h_A(x)$ 和 $h_B(x)$ 是两个犹豫模糊元，则有

(1) $h_A(x)\tilde{\bigcap} h_B(x)=\bigcup_{i=1}^{l}\{h_A^{\sigma(i)}(x)\wedge h_B^{\sigma'(i)}(x)\}$；

(2) $h_A(x)\tilde{\bigcup} h_B(x)=\bigcup_{i=1}^{l}\{h_A^{\sigma(i)}(x)\vee h_B^{\sigma'(i)}(x)\}$。

定义 2.2 对任意的 $A,B\in HF(X)$，则有

(1) $A\tilde{\bigcap}B=\{\langle x,h_{A\tilde{\bigcap}B}(x)\rangle|x\in X\},h_{A\tilde{\bigcap}B}(x)=h_A(x)\tilde{\bigcap}h_B(x)$；

(2) $A\tilde{\bigcup}B=\{\langle x,h_{A\tilde{\bigcup}B}(x)\rangle|x\in X\},h_{A\tilde{\bigcup}B}(x)=h_A(x)\tilde{\bigcup}h_B(x)$。

本文利用前面给出的数值延拓方法，定义新的犹豫模糊包含关系如下。

定义 2.3 对任意的 $A,B\in HF(X)$，若 $h_A(x)\preceq h_B(x)$，则称 A 是 B 的犹豫模糊子集，记为 $A\le B$。其中，$h_A(x)\le h_B(x)\Leftrightarrow h_A^{\sigma(i)}(x)\le h_B^{\sigma'(i)}(x)$, $i=1,2,\cdots,l\quad \forall x\in X$。

由定义 2.3 可直接得到下面的结论。

定理 2.1 对任意的 $A,B\in HF(X)$，有 $A\tilde{\bigcap}B\le A,B$ 和 $A,B\le A\tilde{\bigcup}B$。

定理 2.1 表明利用本文定义的犹豫模糊集的交、并运算和包含关系，就可以通过交、并运算实现信息粒的细化与泛化。下面利用新的交、并运算来建立粗糙犹豫模糊集模型。

定义 2.4（粗糙犹豫模糊集） 设 U/R 是 Pawlak 近似空间，$[x]_R\in U/R$ 为 x 所在的 R 等价类，A 为 U 上的犹豫模糊集，对 $\forall x\in U$，定义 A 的上、下近似如下：

$$\underline{R}(A)(x)=\tilde{\bigcap}_{y\in[x]_R}h_A(y)，\quad \overline{R}(A)(x)=\tilde{\bigcup}_{y\in[x]_R}h_A(y)。$$

若 $\overline{R}(A)=\underline{R}(A)$，则称 A 是可定义的，否则称 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 是粗糙犹豫模糊集。

由定义 2.4 不难验证该粗糙犹豫模糊集有以下性质：

定理 2.2 (1) $\underline{R}(A)\subseteq R(A)\subseteq\overline{R}(A)$；

(2) $\overline{R}(A\bigcup B)=\overline{R}(A)\bigcup\overline{R}(B)$；

(3) $\underline{R}(A\bigcap B)=\underline{R}(A)\bigcap\underline{R}(B)$；

(4) $\underline{R}(A)\bigcup\underline{R}(B)\subseteq\underline{R}(A\bigcap B)$；

(5) $\underline{R}(A\bigcap B)\subseteq\overline{R}(A)\bigcap\overline{R}(B)$；

(6) $\underline{R}(\sim A)=\sim\overline{R}(A)$，$\overline{R}(\sim A)=\sim\underline{R}(A)$。

3 基于模糊等价关系的犹豫模糊粗糙集

由于 Pawlak 近似空间中的等价关系过于严格，犹豫模糊信息系统中的犹豫模糊值很难满足等价关系，因而需要进一步研究模型的推广形式。文献[10]可以得到犹豫模糊信息系统容差关系的相关定义及性质，首先利用上面给出的犹豫模糊元的相似度公式来定义犹豫模糊值信息系统上的容差关系。

定义 3.1 设四元有序组 $HS=(U,A,V,f)$ 为犹豫模糊信息系统，$\lambda\in[0,1]$ 表示相似度阈值，$B\subseteq A$，则 HS 上关于属性子集 B 的 λ-容差关系 R_B^λ 定义为：

$$R_B^\lambda=\{(x_i,x_j)\in U\times U:\ r_{ij}^{a_k}\ge\lambda,\forall a\in B\}\qquad(3.1)$$

其中，$r_{ij}^{a_k}=S(f(x_i,a_k)/f(x_j,a_k))$ 是对象 x_i 与 x_j 在属性 a_k 下的相似度。

性质 3.1 设 R_B^λ 是 HS 上关于属性子集 B 的 λ-

容差关系，则

(1) R_B^λ 具有自反性，即对 $\forall x_i \in U$，有 $(x_i, x_j) \in R_B^\lambda$；

(2) R_B^λ 具有对称性，即对 $\forall (x_i, x_j) \in U$，若 $(x_i, x_j) \in R_B^\lambda$，则 $(x_j, x_i) \in R_B^\lambda$；

(3) R_B^λ 不一定具备传递性，即对 $\forall x_i, x_j, x_k \in U$，若 $(x_i, x_j) \in R_B^\lambda$ 且 $(x_j, x_k) \in R_B^\lambda$，未必有 $(x_i, x_k) \in R_B^\lambda$.

性质 3.2 设 $HS = (U, A, V, f)$ 为一犹豫模糊值信息系统，$\lambda \in [0,1]$ 表示相似度阈值，$B \subseteq A$，则

$$R_B^\lambda = \bigcap_{a \in B} R_a^\lambda \tag{3.2}$$

综上，表明性质 3.1 的容差关系弱于模糊等价关系。目前的研究一般用容差类替代等价类来划分度量论域。

定义 3.2 设 $HS = (U, A, V, f)$ 为一个犹豫模糊值信息系统，$\lambda \in [0,1]$ 表示相似度阈值，$B \subseteq A$，对象 $x \in U$ 在 B 下的 λ-容差类定义为

$$R_B^\lambda(x) = \{y\text{:}(x, y) \in R_B^\lambda\} \tag{3.3}$$

定义 3.2 表明 $R_B^\lambda(x)$ 是论域 U 的一个覆盖集合，并且

$$R_B^\lambda(U) = \{R_B^\lambda(x_1), R_B^\lambda(x_2), \cdots, R_B^\lambda(x_n)\}。$$

利用(3.3)式的相似类来对论域进行划分，就是把和对象 x 满足容差关系 R_B^λ 的全部对象聚成一类。这里存在着两个问题：一是分类过粗；二是传递性无法满足，因而很容易造成错误的分类。为此可以利用模糊集的传递闭包法，将上面的容差关系 R_B^λ（模糊相似关系）改进为对象间的模糊等价关系 $\Re_B^\lambda$。

下面基于模糊等价关系建立犹豫模糊值信息系统的粗糙集模型。

定义 3.3 设 $HS = (U, A, V, f)$ 是一个犹豫模糊值信息系统，$\lambda \in [0,1]$ 表示相似度阈值，$X \subseteq U$，$B \subseteq A$，则 X 基于模糊等价关系 $\Re_B^\lambda$ 的上、下近似集定义为

$$\underline{\Re_B^\lambda} X = \{x \in U\text{：} \Re_B^\lambda(x) \subseteq X\} \tag{3.4}$$

$$\overline{\Re_B^\lambda} X = \{x \in U\text{：} \Re_B^\lambda(x) \bigcap X \neq \phi\} \tag{3.5}$$

其中 $\Re_B^\lambda = \bigcap_{a \in B} \Re_a^\lambda$ 且 $\Re_B^\lambda(x) = \{y\text{:}(x, y) \in \Re_B^\lambda\}$，$\Re_B^\lambda(x)$ 是 x 的模糊等价类。

由定义 3.3 容易得到下面的性质。

性质 3.3 设 $HS = (U, A, V, f)$ 是一个犹豫模糊值信息系统，$\lambda, \mu \in [0,1]$ 表示相似度阈值，$B, C \subseteq A$ 为任意的两个属性子集，$X, Y \subseteq U$，则有

(1) 如果 $B \subseteq C$，则有 $\underline{\Re_B^\lambda} X \subseteq \underline{\Re_C^\lambda} X$，$\overline{\Re_C^\lambda} X \subseteq \overline{\Re_B^\lambda} X$；

(2) 如果 $\lambda \leq \mu$，则有 $\underline{\Re_B^\lambda} X \subseteq \underline{\Re_B^\mu} X$，$\overline{\Re_B^\mu} X \subseteq \overline{\Re_B^\lambda} X$。

4 模糊等价关系下的犹豫模糊值信息系统约简

本节将基于上节建立的犹豫模糊粗糙集模型，给出犹豫模糊信息系统的属性约简。参考文献[10]可以给出下列定义和性质。

定义 4.1[13] 设 $HS = (U, A, V, f)$ 是一个犹豫模糊值信息系统，$B \subseteq A$，称 B 为 HS 的 λ-约简集当且仅当：

(1) $\Re_B^\lambda = \Re_A^\lambda$，

(2) 对 $C \subseteq A$，都有 $\Re_C^\lambda \neq \Re_A^\lambda$。

HS 的所有 λ-约简集记为 $\mathrm{Red}^\lambda(HS)$，称所有 λ-约简集的交为 HS 的 λ-核属性集，记为 $core^\lambda(HS) = \bigcap \mathrm{Red}^\lambda(HS)$。

本节将利用 Skowron 的分辨矩阵方法计算约简集，为此，先给出模糊等价关系 $\Re_B^\lambda$ 下犹豫模糊值信息系统的分辨矩阵定义：

定义 4.2 设 $HS = (U, A, H, I)$ 是一个犹豫模糊值信息系统，$\lambda \in [0,1]$ 表示相似度阈值，称

$$D_{ij}^\lambda = \{a_k \in A\text{：} \tilde{r}_{ij}^{a_k} < \lambda\} \tag{4.1}$$

$$D_A^\lambda(HS) = \{D_{ij}^\lambda\} \tag{4.2}$$

分别为 U 中对象 x_i 与 x_j 的 λ-可区分集与 HS 关于 A 的分辨矩阵，其中 $\tilde{r}_{ij}^{a_k}$ 表示属性 a_k 下对象 x_i 与 x_j 的模糊等价程度。

显然 $D_{ii}^\lambda = \phi$，并且 D_{ij}^λ 是由在相似度阈值 λ 下能够区分对象 x_i 与 x_j 的所有属性构成的集合。由定

义 3.1 不难得到若$\lambda \le \mu$，则$\Re_A^{\mu}(x) \subseteq \Re_A^{\lambda}(x)$。下面将模糊信息系统中的一些定义和性质直接应用到犹豫模糊信息系统中，可得如下结论。

定理 4.1 设$HS=(U,A,H,I)$是一个犹豫模糊值信息系统，λ与μ为两个相似度阈值，若$\lambda \le \mu$，则$D_{ij}^{\lambda} \subseteq D_{ij}^{\mu}$。

根据定义 4.2 可得到犹豫模糊值信息系统的属性约简判定定理。

定理 4.2 设$HS=(U,A,H,I)$是一个犹豫模糊值信息系统，λ为相似度阈值，则$B \subseteq A$是HS的λ-约简集即$\Re_B^{\lambda}=\Re_A^{\lambda}$当且仅当$\forall D \in D_{ij}^{\lambda}$，$B \cap D \ne \phi$。

定理 4.3 设$HS=(U,A,H,I)$是一个犹豫模糊值信息系统，λ为相似度阈值，则$a_k \in core^{\lambda}(HS)$当且仅当存在$D_{ij}^{\lambda}$使得$D_{ij}^{\lambda}=\{a_k\}$。

定理 4.2 与定理 4.3 给出了模糊等价关系下犹豫模糊值信息系统的属性约简方法及其判定定理。

根据定义 4.2，可定义犹豫模糊值信息系统上的分辨函数如下：

定义 4.3 设$HS=(U,A,H,I)$是一个犹豫模糊值信息系统，λ为相似度阈值，HS的分辨函数f是一布尔函数

$$f=\wedge\{\vee D_{ij}^{\lambda}:\ D_{ij}^{\lambda} \in D_A^{\lambda}(HS)\} \tag{4.3}$$

定义 4.3 表明分辨函数最小析取范式中的所有合取式为A的所有约简。显然，若$B \subseteq A$是满足条件$B \cap D_{ij}^{\lambda} \ne \phi$的最小子集，则$B$是$A$的一个约简。

基于犹豫模糊值信息系统上的模糊等价关系，可得到下面的属性约简方法：

步骤 1：输入犹豫模糊值信息系统$HS=(U,A,H,I)$；

步骤 2：求出对象x_i与x_j在各个属性a_k相似度矩阵$M_{ij}^{a_k}=\{r_{ij}^{a_k}\}$；

步骤 3：求出$M_{ij}^{a_k}$的传递闭包$t(M_{ij}^{a_k})$；

步骤 4：在给定相似度阈值λ下求出每个属性集合下对象间的模糊等价类，求出分辨矩阵与分辨函数，进而得到HS的所有约简与核。

下面将通过一个算例来说明犹豫模糊信息系统的属性约简方法。

例 4.1 设$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$为六名学生的集合，条件属性集合$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，分别表示“文艺”、“体能”、“文化课成绩”、“平时表现”。下面根据条件属性对论域中的对象进行聚类。

表 1 犹豫模糊信息系统

Table1 An hesitant fuzzy value information system

U/A	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	{0.1，0.2}	{0.2，0.3，0.4}	{0.8，0.9}	{0.6}
x_2	{0.15}	{0.2}	{0.7}	{0.6}
x_3	{0.3，0.4}	{0.3}	{0.85}	{0.6}
x_4	{0.35}	{0.7，0.9}	{0.9}	{0.9，0.1}
x_5	{0.7}	{0.7}	{0.2，0.3，0.4}	{0.5，0.6}
x_6	{0.7，0.8}	{0.8，0.9}	{0.2}	{0.55}

首先利用相似度公式(1.2)求出各个属性下对象间的相似度$r_{ij}^{a_k}$ $(k=1,2,3,4)$，表示为下面四个模糊相似矩阵：

$$M_{ij}^{a_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0.95 & 0.8 & 0.8 & 0.45 & 0.4 \\ 0.95 & 1 & 0.8 & 0.8 & 0.45 & 0.4 \\ 0.8 & 0.8 & 1 & 0.95 & 0.65 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 & 0.95 & 1 & 0.65 & 0.6 \\ 0.45 & 0.45 & 0.65 & 0.65 & 1 & 0.95 \\ 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.95 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{ij}^{a_2}=\begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.93 & 0.5 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 1 & 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.35 \\ 0.93 & 0.9 & 1 & 0.5 & 0.6 & 0.45 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.9 & 0.95 \\ 0.6 & 0.5 & 0.6 & 0.9 & 1 & 0.85 \\ 0.60 & 0.35 & 0.45 & 0.95 & 0.85 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{ij}^{a_3}=\begin{pmatrix} 1 & 0.85 & 0.95 & 0.95 & 0.45 & 0.95 \\ 0.85 & 1 & 0.95 & 0.95 & 0.65 & 0.65 \\ 0.95 & 0.95 & 1 & 0.9 & 0.7 & 0.7 \\ 0.95 & 0.95 & 0.9 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.45 & 0.65 & 0.7 & 0.6 & 1 & 0.95 \\ 0.95 & 0.65 & 0.7 & 0.6 & 0.95 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{ij}^{a_4}=\begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.75 & 0.65 & 0.95 & 0.95 \\ 0.7 & 1 & 0.95 & 0.95 & 0.65 & 0.65 \\ 0.75 & 0.95 & 1 & 0.9 & 0.7 & 0.7 \\ 0.65 & 0.95 & 0.9 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.95 & 0.65 & 0.7 & 0.6 & 1 & 0.95 \\ 0.95 & 0.65 & 0.7 & 0.6 & 0.95 & 1 \end{pmatrix}。$$

若取相似度阈值为$\lambda=0.75$，考虑属性a_4，从$M_{ij}^{a_4}$的第三行可以看到x_1,x_2,x_3,x_4聚为一类，可是由第四行发现只有x_2,x_3,x_4聚成一类，没有包含x_1，因此这个结果并不能对论域中的对象进行有效的聚类。下面利用平方法计算出上述模糊相似关系的传递闭包，并将模糊等价关系$\Re$可以用一个模糊等价矩阵$\overline{M_{ij}}=(r_{ij})_{n\times n}$来表示。得到对象在各个属性下的

模糊等价矩阵分别为：

$$\overline{M}_{ij}^{a_1}=\left\{\begin{matrix} 1 & 0.95 & 0.8 & 0.8 & 0.65 & 0.65 \\ 0.95 & 1 & 0.8 & 0.8 & 0.65 & 0.65 \\ 0.8 & 0.8 & 1 & 0.95 & 0.65 & 0.65 \\ 0.8 & 0.8 & 0.95 & 1 & 0.65 & 0.65 \\ 0.65 & 0.65 & 0.65 & 0.65 & 1 & 0.95 \\ 0.65 & 0.65 & 0.65 & 0.65 & 0.95 & 1 \end{matrix}\right\},$$

$$\overline{M}_{ij}^{a_2}=\left\{\begin{matrix} 1 & 0.9 & 0.93 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 1 & 0.9 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.93 & 0.9 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 1 & 0.9 & 0.95 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.95 & 0.9 & 1 \end{matrix}\right\},$$

$$\overline{M}_{ij}^{a_3}=\left\{\begin{matrix} 1 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 \\ 0.95 & 1 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 \\ 0.95 & 0.95 & 1 & 0.95 & 0.95 & 0.95 \\ 0.95 & 0.95 & 0.95 & 1 & 0.95 & 0.95 \\ 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 1 & 0.95 \\ 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 0.95 & 1 \end{matrix}\right\},$$

$$\overline{M}_{ij}^{a_4}=\left\{\begin{matrix} 1 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.95 & 0.95 \\ 0.75 & 1 & 0.95 & 0.95 & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.95 & 1 & 0.95 & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.95 & 0.95 & 1 & 0.75 & 0.75 \\ 0.95 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 1 & 0.95 \\ 0.95 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.95 & 1 \end{matrix}\right\}。$$

$\overline{M}_{ij}^{a_1}$，$\overline{M}_{ij}^{a_2}$，$\overline{M}_{ij}^{a_3}$，$\overline{M}_{ij}^{a_4}$ 刻画了各个属性下对象之间的模糊等价程度，取相似度阈值 $\lambda=0.76$，则可得到属性 a_4 下的一个模糊等价聚类为 $\{\{x_1,x_5,x_6\},\{x_2,x_3,x_4\}\}$，此结果较容差关系是合理有效的。

接下来在相似度阈值 $\lambda=0.76$ 下求表所示的犹豫模糊值信息系统的约简集与核属性集。

根据定义 4.2 可得分辨矩阵为：

$$D_{ij}^{0.76}=\begin{pmatrix} \phi & \{a_4\} & \{a_4\} & \{a_2,a_4\} & \{a_1,a_2\} & \{a_1,a_2\} \\ \{a_4\} & \phi & \phi & \{a_2\} & \{a_1,a_2,a_4\} & \{a_1,a_2,a_4\} \\ \{a_4\} & \phi & \phi & \{a_2\} & \{a_1,a_2,a_4\} & \{a_1,a_2,a_4\} \\ \{a_2,a_4\} & \{a_2\} & \{a_2\} & \phi & \{a_1,a_4\} & \{a_1,a_4\} \\ \{a_1,a_2\} & \{a_1,a_2,a_4\} & \{a_1,a_2,a_4\} & \{a_1,a_4\} & \phi & \phi \\ \{a_1,a_2\} & \{a_1,a_2,a_4\} & \{a_1,a_2,a_4\} & \{a_1,a_4\} & \phi & \phi \end{pmatrix}$$

于是分辨函数为：

$$f=a_2\wedge a_4,$$

因而得到系统的一个约简为 $\{a_2,a_4\}$，同时 $\{a_2,a_4\}$ 也为该信息系统的核属性集。

5 结束语

本文用均值对长度不等的犹豫模糊元进行补齐，然后定义犹豫模糊集新的交并运算，并基于经典的等价关系建立了粗糙犹豫模糊集模型。利用犹豫模糊元的相似度得到了犹豫模糊信息系统中对象间的容差关系，分析了现有的容差关系在犹豫模糊值聚类中的不足，构建了犹豫模糊值信息系统上的一种模糊等价关系，同时在模糊等价关系的基础上建立了犹豫模糊值信息系统的粗糙集模型。最后研究了在模糊等价关系下犹豫模糊值信息系统的属性约简，给出了有关的判定定理，并通过实际算例说明了属性约简方法的合理性和有效性。

参考文献:

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353.

[2] Atanassov K.Intuitionistic fuzzy sets[J].Fuzzy Sets and Systems,1986,20(1):87-96.

[3] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued Intuitionistic fuzzy sets[J].Fuzzy Sets and Systems,1989,31(3):343- 349.

[4] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25: 529-539.

[5] Zadeh L, Similarity relations and fuzzy orderings[J]. Information Science, 1970,3:177-200.

[6] Pappis C, Karacapilidis N. A comparative assessment of measures of similarity of fuzzy values[J]. Fuzzy Sets and Systems,1993,56:171-174.

[7] 袁修久,张文修. 模糊粗糙集的包含度和相似度[J].模糊系统与数学,2005(1):111-115.

[8] 林娟,米据生,解滨. 粗糙集的两种相似性度量[J].计算机科学,2015,42(6):97-100.

[9] Pawlak Z.Rough sets[J].Internationl Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[10] 郭庆. 基于粗糙集理论的不确定信息系统及其决策研究[D].合肥:合肥工业大学,2017.

[11] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J].Information Sciences, 2011, 181: 2128-2138.

[12] 王国胤. Rough 集理论与知识获取[M].西安:西安交通大学出版社,2001.

[13] 高新波. 模糊聚类分析及其应用[M].西安：西安电子科技大学出版社,2004.