黎曼流形中运动群不变量*

朱庆国
(盐城工学院 基础部,江苏 盐城　224003)

摘　要:黎曼流形运动群的研究是微分几何中一个重要问题。构造了黎曼流形中亏数为 2 的一个运动群,进而对黎曼流形度规运动群、共形运动群以及亏数为 2 的运动群的黎曼不变量进行了刻划。证明上述 3 个运动群之间存在着某种所谓"自相关性"。给出黎曼空间中共形运动群在共形于黎曼空间的空间中变为度规运动群的一个有趣的例子。

关键词:度规运动群;共形运动群;亏数;不变量
中图分类号:O186.162　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2003)03-0032-06

黎曼流形运动群的研究是微分几何中一个重要问题。本文在文献[1]、[2]的基础上,对黎曼流形运动群的不变量作某些讨论。为了方便先引进文献[1]、[2]中几个有关的概念。设 Rn 是一个 n 维黎曼流形,有黎曼度量 $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j(i、j = 1\cdots n)$ 令 $x = (x^i)$ 是 R_n 的任意局部坐标系,在一单参数变换群

$$x' = f(x,\tau) \tag{1}$$

下,变换后的变量 $\overline{\mathrm{d}s^2} = g'_{ij}(x')\mathrm{d}x^{1i}\mathrm{d}x^{1j}$,如在变换群(1)下,度量形式保持不变 $\overline{\mathrm{d}s^2} = \mathrm{d}s^2$,则称变换群(1)是 Rn 中的等距变换群或度规运动群。一般设 $G_r = \{x' = f(x,a) \mid x \in Rn, a = (a^1\cdots a^r), a^i \in R, i = 1,\cdots r\}$ 是 R_n 中含 r 参数的度规运动群,而 $X = \zeta^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ 是 G 的单参子群的无穷小生成元,则如所知 Killing 向量 X 将满足下列形式的 Killing 方程

$$L_X g_{ij} = \nabla_i\zeta_j + \nabla_j\zeta_i = 0 \tag{2}$$

其中

$$\nabla_i\zeta_j = \frac{\partial\zeta_j}{\partial x^i} - \Gamma^L_{ij}\zeta_L$$

是 $\zeta_j = g_{ij}\zeta^i$ 的协变导数,而 Γ^L_{ij} 是 Rn 上的 Levi-Civite 联络 $\Gamma^L_{ij} = \dfrac{1}{2}g^{lk}\left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \dfrac{\partial g^{ki}}{\partial x^i} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$ 可证方程(2)的另一等价形式是

$$\sum_{k=1}^{n}\left(g_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^j} + g_{ik}\frac{\partial g^k}{\partial x^i} + \zeta^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = 0 \tag{3}$$

再则,如在变换群(1)下,变换后的度量满足 $\overline{\mathrm{d}s^2} = \Phi(x,\tau)\mathrm{d}s^2$,其中函数 $\Phi(x,\tau) \neq 0$,则称变换群(1)是黎曼流量 R_n 中的共形运动群,如设 $X = \zeta^j\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 是共形运动群基向量场,那么我们有 X 将满足下列广义 Killing 方程

$$L_X g_{ij} = \nabla_i\zeta_j + \nabla_j\zeta_i = \phi g_{ij} \tag{4}$$

其中 $\phi = \dfrac{\partial\Phi(x,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau = e}$,$e$ 是群单位元,可证方程(4)的另一等价形式是

$$\sum_{k=1}^{n}\left(g_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^j} + g_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^i} + \zeta^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \phi g_{ij} \tag{5}$$

注意到在变换群 $x' = f(x,\tau)$ 下,变换后的度规满足方程

$$g'_{kl}(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial f^l}{\partial x^j} = g_{ij}(i、j = 1\cdots n)$$

因此,一般地我们可考虑在变量 $x = (x^1\cdots x^n)$,$y = (y_{ij}(x))(i、j = 1\cdots n)$ 的空间中下列单参变换群

* 收稿日期:2003-05-13
万方数据
作者简介:朱庆国(1946-),男,江苏海安人,盐城工学院副教授。

$$\begin{cases} x' = f(x,\tau) \\ y_{ij} = y'_{kl}\dfrac{\partial f^k(x,\tau)}{\partial x^i}\dfrac{\partial f^l(x,\tau)}{\partial x^i}(i,j = 1\cdots n) \end{cases} \tag{6}$$

这里,假定 f 的 Jacobij(f)为满秩,这时,变换群(1)我们将称为 Riemann 流形 R_n 中一般运动群,并记作 G,而变换群(1),(6)则开拓了从变量 x 到变量 y 的运动,并确定出同构于 G 的一延拓群 $\widetilde{G}\approx G$。

如设 $X = \zeta^k\dfrac{\partial}{\partial x^k}$是运动群 G 的基向量场,则延拓群 $\widetilde{G}$ 的基向量场相应为 $\widetilde{X} = X + \eta_{ij}\dfrac{\partial}{\partial y_{ij}}$

我们有引理 1.1[2],一般运动群延拓群 $\widetilde{G}$ 的基向量 $\widetilde{X}$ 中的系数 $\eta_{ij} = -\left(y_{kj}\dfrac{\partial\zeta^k}{\partial x^i} + y_{ik}\dfrac{\partial\zeta^k}{\partial x^j}\right)$

从而

$$\widetilde{X} = \zeta^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k} - \left(y_{kj}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^i} + y_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y_{ij}} \tag{7}$$

考察坐标系(x^i)中带有度量张量 $g_{ij}(x)$的 Riemann 流形,R_n 中的运动群 G,$\forall$ 变换 $T\in\widetilde{G}$,它将把由方程(2)所确定的流形 S 变为等价的流形 $T(S)$,这可由群 $\widetilde{G}$ 的结构方程(6)得到,流形 S 的轨道

$$\widetilde{G}(\mathbb{S}) = \bigcup_{T\in G} T(\mathbb{S})$$

是延拓群 $\widetilde{G}$ 的包含 S 的一最小不变流形,由于$\dim S = n$,可证此时相应于群 $\widetilde{G}$ 的流形 S 的不变性亏数

$$\delta = \dim\widetilde{G}(\mathbb{S}) - n \tag{9}$$

将不依赖于 R_n 中坐标系(x^i)的选取,δ 我们将称为 R_n 中运动群 G 的亏数,并记作 $\delta = \delta(R_n,G)$。

引理 1.2[3],设 $X = \zeta^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$是 R_n 中运动群 G 的基向量场,则 G 的亏数

$$\delta(R_n,G) = \operatorname{rank}[L_X g_{ij}] = \operatorname{rank}\left[\zeta^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^j} + g_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^i}\right] \tag{10}$$

1　R_n 中度规运动群和共形运动群不变量刻划

下面我们首先来给出关于 Riemann 流形 R_n 中度规运动群和共形运动群不变量的刻划。

定理 1.1　Riemann 空间 R_n 中运动群 G 是度规运动群的充分必要条件是由方程 $g_{ij}(x) - y_{ij} = 0$ 所确定的流形 S 相应于 G 的延拓群$\widetilde{G}$为不变。

证:由方程 $g_{ij}(x) - y_{ij} = 0$ 所确定的流形 S 相应于延拓群 $\widetilde{G}$ 为不变的充要条件是

$$\widetilde{G}(S) = S$$

即

$$\widetilde{X}(g_{ij}(x) - y_{ij})\mid_S = 0(i,j = 1\cdots n) \tag{11}$$

由引理 1.1 方程(11)为

$$\left[\zeta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} - \left(y_{kj}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^i} + y_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right](g_{ij}(x) - y_{ij})\mid_S = 0$$

$$\zeta^k(x)\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \left(y_{kj}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^i} + y_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^j}\right)\Bigg|_{y_{ij} = g_{ij}(x)} = 0$$

$$\zeta^k(x)\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^j} = 0$$

此即 Killing 方程(3)。由此我们可得

推论 1　Riemann 流形 R_n 中的度规运动群 G 具有$\dfrac{1}{2}n\cdot(n+1)$个无关的不变量 $j_{ij} = g_{ij}(i,j = 1\cdots n)$

定理 1.2　Riemann 流形 R_n 中由方程 $\dfrac{y_{ip}}{y_{11}} = \dfrac{y_{ip}(x)}{y_{11}(x)}(i = 1\cdots n,p = 2\cdots n)(g_{11}(x)\neq 0)$　(12)

所确定的流形 S 相应于共形运动群 G 的延拓群 $\widetilde{G}$ 为不变。

万方数据

证:设 $X=\zeta^J\frac{\partial}{\partial x^J}$是共形运动群 G 基向量场算子,其分量 ζ^j 将满足广义 Killing 方程(5),又设 $X=\zeta^k\frac{\partial}{\partial x^k}-\left(y_{kj}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^i}+y_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y_{ij}}$ 是 G 的延拓群 $\widetilde{G}$ 的基算子,首先我们可写方程(12)为

$$J_{ip}\equiv\frac{g_{ip}(x)}{g_{11}(x)}y_{11}-y_{ip}=0 \tag{13}$$

由这个方程所确定的流形 S 相应于延拓群 $\widetilde{G}$ 为不变的充要条件应为 $\widetilde{X}J_{ip}\mid_S=0$ (14)

下面分两种情况证明方程(14)成立。

(Ⅰ)设 $i=1$,则

$$\widetilde{X}J_{1p}\mid_S=\left[\zeta^k\frac{\partial}{\partial x^k}-\left(y_{kp}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^1}+y_{1k}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^p}\right)\frac{\partial}{\partial y_{1p}}\right]\left(\frac{g_{1p}(x)}{y_{11}(x)}\cdot y_{11}-y_{1p}\right)\Bigg|_S=$$

$$\left(y_{kp}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^1}+y_{1k}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^p}-2y_{1k}\frac{g_{1p}(x)}{y_{11}(x)}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^1}\right)\Bigg|_S+\frac{y_{11}}{g_{11}(x)}\left(\zeta^k\frac{\partial g_{1p}(x)}{\partial x^k}-\frac{g_{1p}(x)}{g_{11}(x)}\zeta^k\frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^k}\right)\Bigg|_S$$

上式右端第一个括号是先令 $j=p$,然后再令 $p=1$ 分别对 y_{1p}和 y_{11}求微商而得到,由于方程(13)它等于

$$\frac{y_{11}}{g_{11}}\left(g_{1k}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^p}+g_{pk}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^1}-2\frac{g_{1p}}{g_{11}}g_{1k}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^1}\right)$$

所以 $\widetilde{X}J_{1p}\mid_S=\frac{y_{11}}{g_{11}^2}\left(g_{11}g_{1k}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^p}+g_{11}g_{pk}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^1}-2g_{1p}g_{1k}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^1}+\zeta^kg_{11}\frac{\partial g_{1p}(x)}{\partial x^k}-g_{1p}\zeta^k\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}\right)=$

$$\frac{y_{11}}{g_{11}^2}[g_{11}(\nabla_1\zeta_p+\nabla_p\zeta_1)-2g_{1p}\nabla_1\zeta_1]=\frac{y_{11}}{g_{11}^2}(g_{11}\phi g_{1p}-g_{1p}\phi g_{11})=0$$

(Ⅱ)设 $i\geqslant 2$ 类似可得

$$\widetilde{X}J_{ip}\mid_S=\left(y_{kp}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^2}+y_{ik}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^p}-2y_{1k}\frac{g_{ip}}{g_{11}}\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^1}\right)\Bigg|_S+\frac{y_{11}}{g_{11}}\left(\zeta^k\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^k}-\frac{g_{ip}}{g_{11}}\zeta^k\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}\right)\Bigg|_S=$$

$$\frac{y_{11}}{g_{11}^2}[g_{11}(\nabla_1\zeta_p+\nabla_p\zeta_i)-2g_{ip}\nabla_1\zeta_1]=\frac{y_{11}}{g_{11}^2}(g_{11}\phi g_{ip}-g_{ip}\phi g_{11})=0$$

因此(14)式成立。由此可得推论 2 Riemann 流形 R_n 中的共形运动群 G 具有$\frac{1}{2}n(n+1)-1$ 个无关不变量 $J_{ip}=\frac{g_{ip}}{g_{11}}(i=1\cdots n,p=2\cdots n)$

定理 1.3 (1)设 G 是R_n 中的度规运动群,则 G 的亏数$\delta(R_n,G)=0$。(2)设 G 是R_n 中的共形运动群,则 G 的亏数$\delta(R_n,G)=1$。证:由引理 1.2 和方程(3),方程(5)可得

2 R_n 中亏数为 2 的运动群及其不变量

由定理 1.3 可知,n 维黎曼流形 R_n 中的度规运动群亏数 $\delta=0$,共形运动群亏数 $\delta=1$,下面我们来构造一个亏数 $\delta=2$ 的运动群考虑下面的广义 Killing 方程组

$$\begin{cases}\nabla_j\zeta_k+\nabla_k\zeta_j=\phi_1g_{jk}(j,k=1\cdots n-1)\\ \nabla_i\zeta_n+\nabla_n\zeta_i=\phi_2g_{in}(i=1\cdots n)\end{cases} \tag{15}$$

其中 $\phi_1\neq\phi_2$ 在度规张量 $g_{ij}=\delta_{ij}$的 n 维平坦流形 V_n 中,方程(15)可简化为

$$\frac{\partial\zeta^j}{\partial x^k}+\frac{\partial\zeta^k}{\partial x^j}=\phi_1\delta_{jk}\quad(j,k=1\cdots n-1) \tag{16}$$

$$\frac{\partial\zeta^n}{\partial x^j}+\frac{\partial\zeta^j}{\partial x^n}=0\quad(j=1\cdots n-1) \tag{17}$$

$$\frac{\partial\zeta^n}{\partial x^n}=\frac{1}{2}\phi_2 \tag{18}$$

这里,$\zeta^1\cdots\zeta^{n-1}$可将它看作是变量 $x^1\cdots x^{n-1}$的函数,而变量 x^n(以下设 $x^n=t$)起着参数的作用,方程

万方数据

(16)具有下列一般解[4]

$$\zeta^j = h_k(t)(2x^jx^k - |\vec{x}|^2\delta^{jk}) + p^j_k(t)x^k + q(t)x^j + r^j(t) \quad (j = 1\cdots n-1) \tag{19}$$

其中$|\vec{x}|^2 = (x^l)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2$，$p^j_k = -p^k_j(j<k)$

$h_k(t)$，$p^j_k(t)$，$q(t)$，$r^j(t)$都是 t 的函数。

由(19)式可求得　$\dfrac{\partial\zeta^j}{\partial x^k} - \dfrac{\partial\zeta^k}{\partial x^j} = 4(h_k(t)x^j - h_j(t)x^k) + 2p^j_k(t)$

这些方程和方程(17)的相容性条件　$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\zeta^j}{\partial x^k} - \dfrac{\partial\zeta^k}{\partial x^j}\right) = 0$

给出解　$2(\dot{h}_k(t)x^j - \dot{h}_j(t)x^k) + \dot{p}^j_k(t) = 0$

这里'·'表示对 t 的微分。由此可得　$\dot{h}_j(t) = 0$　　$\dot{p}^j_k(t) = 0$

因而在(19)中，所有的 h_j 和 $p^j_k(j,k = 1\cdots n-1)$都是与 t 无关的常数，将(19)代入(17)中，容易解出

$$\zeta^n = -\frac{1}{2}\dot{q}(t)|\vec{x}|^2 - \sum_{j=1}^{n-1} r^j(t)x^j + c(t)$$

其中 $c(t)$是 t 的任意的函数，从而方程(16)、(17)具有下列一般解

$$\begin{cases} \zeta^j = h_k(2x^jx^k - |\vec{x}|^2\delta^{jk}) + p^j_kx^k + q(t)x^j + r^j(t) \\ \zeta^n = -\dfrac{1}{2}\dot{q}(t)|\vec{x}|^2 - \sum\limits_{j=1}^{n-1} r^j(t)x^j + c(t) \quad (j,k = 1\cdots n-1) \end{cases} \tag{20}$$

可惜这里所求到的解(20)太大，不能构成李代数，现我我们可分出它的下面几个李代数

(1)在解(20)中，令 $p^j_k = 0$，$r^j(t) = 0$　$q(t) = 0$ 而 $h_k(k = 1\cdots n-1)$和函数 $c(t)$任取，此时算子

$$X_c = c(t)\frac{\partial}{\partial t}$$

它确定出实直线上一无限变换群，其有限子群的最大阶等于 3，作为有限子群的基算子可取相应于函数 $c(t) = 1$，$c(t) = t$ 和 $c(t) = t^2$ 的基算子，而常数 $h_k(k = 1\cdots n-1)$任意，那么我们会得到下列基算子

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = t\frac{\partial}{\partial t}, X_3 = t^2\frac{\partial}{\partial t}, Y_k = (2x^jx^k - |\vec{x}|^2\delta^{jk})\frac{\partial}{\partial x^j} \quad (k = 1\cdots n-1) \tag{21}$$

对于它，我们有$[X_1, X_2] = X_1$，$[X_1, X_3] = 2X_2$，$[X_2, X_3] = X_3$　(22)

$$[X_i, Y_k] = 0, [Y_K, Y_L] = 0 \quad (i = 1、2、3、K, L = 1\cdots n-1)$$

因此(21)形成一李代数，由它可确定出 V_n 中$(n+2)$参数的运动群 G_{n+2}。把(21)中算子的坐标代入(10)后，可求得亏数 $\delta(V_n, G_{n+2}) = 2$

(2)把(20)中的 ζ^j 代入方程(16)中，可求得 $\phi_1 = 4h_jx^j + 2q(t)$。令 $\phi_1 = 0$ 得

$$h_j = 0 \quad (j = 1\cdots n-1) \quad q = 0$$

将 $h_j = 0$，$q = 0$ 代入(20)中，它给出原方程(16)(17)在 $\phi_1 = 0$ 时的下列一般解

$$\begin{cases} \zeta^j = p^j_kx^k + r^j(t) \quad (j = 1\cdots n-1) \\ \zeta^n = -\sum\limits_{j=1}^{n-1} r^j(t)x^j + c(t) \end{cases} \tag{23}$$

从上述解中可求出一李代数为

$$\begin{cases} X_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j} \quad (j = 1\cdots n-1) \\ X_{jk} = x^k\dfrac{\partial}{\partial x^j} - x^j\dfrac{\partial}{\partial x^k}(j < k, j、k = 1\cdots n-1) \\ X_c = c(t)\dfrac{\partial}{\partial t} \end{cases} \tag{24}$$

有　$[X_j, X_{jk}] = -X_j$，$[X_j, X_c] = 0$，$[X_{jk}, X_c] = 0$

万方数据

(3)代替原方程(16)、(17)、(18)考虑下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \zeta^j}{\partial x^k}+\dfrac{\partial \zeta^k}{\partial x^j}=0 \quad (j\neq k, j、k=1\cdots n-1) & (25)\\ \dfrac{\partial \zeta^j}{\partial x^n}=0 \quad \dfrac{\partial \zeta^n}{\partial x^j}=0 \quad (j=1\cdots n-1) & (26)\\ \dfrac{\partial \zeta^j}{\partial x^j}=\dfrac{1}{2}\phi_1 \quad (1\cdots n-1) & (27)\end{cases}$$

注意到因为方程(25)、(27)和方程(16)相重合,所以它的一般解由(19)给出,将(19)代入方程(26)中,可确定出所有的量 $h_k(t)$,$p_k^j(t)$,$q(t)$,$r^j(t)$都是常数,而 $\zeta^n=c(t)$,因此方程(25)(26)(27)具有依赖于$\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$个任意常数 $h_k\cdot p_k^j$,$(j<k)$. $r^j(j、k=1\cdots n-1)$,q 和一个任意函数 $c(t)$的下列不变解

$$\begin{cases}\zeta^j=h_k(2x^jx^x-|\vec{x}|^2\delta^{jk})+p_k^jx^k+qx^j+r^j(j=1\cdots n-1)\\ \zeta^n=c(t)\end{cases} \tag{28}$$

由上述解可得下列李代数

$$\begin{cases}X_j=\dfrac{\partial}{\partial x^j} \quad X_{jk}=x^k\dfrac{\partial}{\partial x^j}-x^j\dfrac{\partial}{\partial x^k}(j<k)\\ Y_j=(2x_jx^k-|\vec{x}|^2\delta^{jk})\dfrac{\partial}{\partial x^k}\\ Z=x_j\dfrac{\partial}{\partial x^j} \quad X_c=c(t)\dfrac{\partial}{\partial t}(j,k=1\cdots n-1)\end{cases} \tag{29}$$

上述李代数包含李代数(21)和李代数(24)来作为自己的子代数,由它所确定的运动群 G_∞是一无限群。且可求出其亏数 $\delta(V_n,G_\infty)=2$ 以上我们即构造出在平坦流形 V_n 中亏数$\delta=2$ 的一运动群 G_∞。

定理 2.1 在 n 维平坦流形 V_n 中,由(29)所确定的运动群 G_∞具有$\frac{1}{2}n(n+1)-2$ 个无关的不变量

$$\begin{cases}J_{jk}=g_{jk}(j\neq k, j=1\cdots n-1, k=1\cdots n)\\ J_{kk}=\dfrac{g_{kk}}{g_{11}} \quad (k=2\cdots n-1)\end{cases} \tag{30}$$

证 根据定理 1.1,由方程 $y_{jk}=g_{jk}(j\neq k, j=1\cdots n-1, k=1\cdots n)$所确定的流形相应于延招群 $\widetilde{G}$ 为不变的充要条件是 G 是度规运动群,其基向量场 X 满足 Killing 方程(3),而在平坦流形 V_n 中,它可归结为方程(25)和(26),再据定理 1.2,由方程$\frac{y_{kk}}{y_{11}}=\frac{g_{kk}}{g_{11}}(k=2\cdots n)$所确定的流形相应于延拓群 $\widetilde{G}$ 为不变的充要条件是 G 是共形运动群,其基向量场 X 满足广义 Killing 方程(5),而在平坦流形 V_n 中,它可归纳为方程(27)。证毕。

3 共形运动群在共形黎曼空间中变为度规运动群的一个例子

最后我们可指出由定理 1.3,黎曼流形 R_n 中度规运动群特征是亏数 $\delta=0$,共形运动群特征是亏数 $\delta=1$,但在某些情况,这两个运动群会存在紧密联系,下面我们找出一个黎曼空间中的共形运动群在共形于黎曼空间的空间中将变为度规运动群的例。

定义 如果黎曼空间 R_n 和$\widetilde{R_n}$的度规张量 g_{ij}和$\widetilde{g_{ij}}$在某个坐标系(x^i)中满足关系式

$$\widetilde{g_{ij}}(x)=e^{2\sigma(x)}g_{ij}(x) \tag{31}$$

则称$\widetilde{R_n}$和 R_n 是共形的。

今考察具有度规 $ds^2=-(1+t)dx^2-dy^2-dz^2+dt^2 \quad (t\geqslant 0)$ (32)

的黎曼空间 R_4,在空间 R_4 中,广义 Killing 方程(5)为下列两个方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \zeta^2}{\partial z}+\dfrac{\partial \zeta^3}{\partial y}=\dfrac{\partial \zeta^2}{\partial y}-\dfrac{\partial \zeta^4}{\partial t}=\dfrac{\partial \zeta^3}{\partial t}-\dfrac{\partial \zeta^4}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial \zeta^2}{\partial y}=\dfrac{\partial \zeta^3}{\partial z}=\dfrac{\partial \zeta^4}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\phi\end{cases} \tag{33}$$

万方数据

$$\begin{cases}(1+t)\dfrac{\partial\zeta^1}{\partial y}+\dfrac{\partial\zeta^2}{\partial x}=(1+t)\dfrac{\partial\zeta^1}{\partial z}+\dfrac{\partial\zeta^3}{\partial x}=(1+t)\dfrac{\partial\zeta^1}{\partial t}-\dfrac{\partial\zeta^4}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial\zeta^1}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\phi-\dfrac{1}{2(1+t)}\zeta^4\end{cases}\tag{34}$$

这里可求得方程(33)、(34)的依赖于 5 个任意常数 a、b、c_i($i=1$、2、3)的下列一般解(过程从略)。

$$\zeta^1=\frac{1}{2}ax+c_1,\zeta^2=ay+bz+c_2,\zeta^3=az-by+c_3,\zeta^4=a(1+t),\phi=2a\tag{35}$$

依次令 a、b、c_i($i=1,2,3$)中一个为 1,而其余为 0。可得空间 R_4 中具有 5 参数的共形运动群 G_5 的李代数的下列基

$$X=\frac{\partial}{\partial x},X_2=\frac{\partial}{\partial y},X_3=\frac{\partial}{\partial z},X_4=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},X_5=\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}+(1+t)\frac{\partial}{\partial t}\tag{36}$$

现我们令 $\sigma=\ln(1+t)^{-1}$,那么具有度规

$$\widetilde{\mathrm{d}s^2}=e^{2\sigma}\mathrm{d}s^2=(1+t)^{-2}(-(1+t)\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}t^2)\tag{37}$$

的空间$\widetilde{R_4}$,它共形于空间 R_4 而对于度规$\widetilde{g_{ij}}$(37)和共形运动群 G_5 的 ζ_i(35)($i=1,2,3,4$),则易于验证它们满足 Killing 方程(3),因此,R_4 中的共形运动群 G_5 在共形于 R_4 的空间$\widetilde{R_4}$中现在可转化为一度规运动群。

参考文献:

[1] 朱庆国.黎曼流形中一类半线性方程的群分析[J].数学杂志,2000,20(4):459 – 464.

[2] 朱庆国.真空 Einstein 方程所容许的群及方程的局部不变解[J].数学物理学报,1998,18(增):35 – 43.

[3] OBCяHHKOB AB. ГруппоВой аНалиz gифферелчаптъннѣх ураВНеНий[M].москбѣаь.Hayka,1975.5 – 52.

[4] Uбралик U X. ГрупНbх ободлеНих gВиmеНий[M].DAH cccp,1969.

The Invariant of the Group of Motions in Riemann Manifold

ZHU Qing-guo

(Department of Basic Science of Yancheng Institute of Technology,Jiangsu Yancheng　224003,China)

Abstract:The research of Rimann manifold's the group of motions is an important question of the differential geometry. The article stractures a group of motions about the defective number 2 in Riemann manifold. It portraies Riemann's invariant in Riemann's manifold about the group of motions of the gauge, conformal and defective number being 2. We prove the three groups of motions above having the invariant. The guality of self – correlation is being in them besides. The articl shows an interesting example that the conformal group of motions in Riemann Space becomes the gauge group of motions in conformal space.

Keywords:gauge group of motions; conformal group of motions; defective number; invariant

万方数据