

二维流场模拟的矩阵标识法

李光焱¹, 王船海¹, 周晶晏²

(1. 河海大学水文水资源及环境学院, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学交通与海洋工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 采用二分步法, 从积分型方程出发, 在有限控制体上建立守恒型差分格式, 对二维浅水波方程进行求解. 求解线性代数方程组采用矩阵标识法, 提高了计算效率, 特别适合于流域大尺度水流的模拟. 计算网格采用无序编码方法, 灵活方便. 算例表明, 本方法能够模拟宽广湖泊一类大尺度的二维水流.

关键词: 二维水流; 数值模型; 矩阵标识法

中图分类号: TV131.3 文献标识码: A 文章编号: 1000-1980(2002)03-0080-05

二维流场的数值模拟研究由来已久, 取得了十分丰富的成果. 数值模拟方法主要有三大类: 有限差分法、有限单元法和有限分析法. 其中有限差分法应用最为普遍. 常用的有限差分法有 ADI 法和剖开算子法, 这些方法又可分为显式和隐式两种格式. 显式方法编程简单, 但稳定性受到 Courant 数的限制, 时步长较小, 当地形变化剧烈时, 还会出现“轴化”现象, 使计算结果违背物理规律. 采用隐式方法求解, 将形成巨大的高阶方程组, 对于河道型的计算区域, 由于有一个方向的尺度相对较小, 可采用矩阵追赶法^[1]求解. 但对于大范围的计算区域, 当两个方向的尺度都较大时, 这种方法也难以实施. 特别是对于宽广的计算区域, 通常采用显式的方法. 剖开算子法求解使得方法简化, 易于实现. 为保证计算的稳定性, 可采用隐式的方法. 隐式方法首要问题是采用高效的存储和简捷的求解. 本文试图探讨这种方法.

1 基本方程

描述二维水流运动的基本方程是浅水波方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + gh \frac{\partial Z}{\partial x} + gU \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c^2 h} - c_w |W| W_x - fV = \nu \nabla^2 U \\ \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + gh \frac{\partial Z}{\partial y} + gV \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c^2 h} - c_w |W| W_y + fU = \nu \nabla^2 V \end{cases} \quad (1)$$

式中: x, y, t ——平面坐标和时间; Z ——水位; u, v ——流速; h ——水深, $h = Z - Z_d$; Z_d ——河床高程; U, V ——沿 x 和 y 方向的单宽流量, $U = uh, V = vh$; c_w ——风应力系数; $|W|$ ——风速的大小; f ——柯氏力系数; g ——重力加速度; c ——谢才系数.

$$\left. \begin{aligned} \text{初始条件} \quad & u(x, y, t_0) = u_0(x, y) \quad v(x, y, t_0) = v_0(x, y) \\ & Z(x, y, t_0) = Z_0(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{边界条件} \quad & \text{开边界} \quad Z_b = Z_b(t) \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \\ & \text{陆边界} \quad V \cdot n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将以上方程按物理性质剖分:

第一分步

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} &= \nu \nabla^2 U \\ \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} &= \nu \nabla^2 V \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

第二分步

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + gh \frac{\partial Z}{\partial x} + gU \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c^2 h} - c_w |\mathbf{W}| W_x - fV &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial t} + gh \frac{\partial Z}{\partial y} + gV \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c^2 h} - c_w |\mathbf{W}| W_y + fU &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对于第一分步, 其等价方程可写成:

$$\left. \begin{aligned} Z^{n+\frac{1}{2}} &= Z^n \\ - \iint_A (\rho \mathbf{V}^{n+1/2} \mathbf{V}^{n+1/2} - \nu \nabla \mathbf{V}^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n} dA &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{V}^{n+1/2} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

即流进控制体的动量之和等于控制体中的动量增量, 可视作在没有外力作用下的控制体中的动量守恒原理。

对于第二分步, 其等价方程可写成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{V}^{n+1}}{\partial t} + gh \nabla Z^{n+1} + g \mathbf{V}^{n+1} \frac{|\mathbf{V}|}{c^2 h} - c_w |\mathbf{W}| \mathbf{W} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}^{n+1} &= 0 \\ - \iint_A \mathbf{V}^{n+1} \cdot \mathbf{n} dA &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

采用数值方法对方程(7)线性化, 可得

$$\mathbf{V}^{n+1} = f(\nabla Z^{n+1}) \quad (8)$$

即

$$u^{n+1} = \alpha_u \frac{\partial Z^{n+1}}{\partial x} + \beta_u \quad v^{n+1} = \alpha_v \frac{\partial Z^{n+1}}{\partial y} + \beta_v \quad (9)$$

$$- \iint_A f(\nabla Z^{n+1}) \cdot \mathbf{n} dA = A_s \frac{Z^{n+1} - Z^{n+1/2}}{\Delta t} \quad (10)$$

式中: A ——形成控制体四周的面积; A_s ——控制体自由水面面积. 方程表示的是考虑水为不可压缩, 流进控制体的水量之和等于控制体的体积变化, 即控制体的质量守恒原理。

2 数值方法

数值求解以上方程步骤为: 由式(6)求出 $\mathbf{V}^{n+1/2}$, 由式(8)得出 \mathbf{V}^{n+1} 与 Z^{n+1} 的线性表达式, 代入式(10)求得 Z^{n+1} , 由式(9)回代可得 u, v . 可见关键在式(6)

(10)的求解. 应用有限控制体方法进行数值离散. 在式(6)中, $-\iint_A (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} - \nu \nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} dA$ 表示的是通过控制面的动量通量. 如图 1 所示的单元 p 的控制体, 控制面为 $W, S, E, N, 4$ 条边. 以 W 边为例, 通过该控制面的动量通量为

$$\left. \begin{aligned} F_W &= (\rho Q u i + \rho Q v j)_W - \mu A \left(A \frac{\partial u}{\partial x} i + A \frac{\partial v}{\partial x} j \right)_W \\ F_{Wu} &= (\rho Q u - \mu A \frac{\partial u}{\partial x})_W = f_w(u_w, u_p) \\ F_{Wv} &= (\rho Q v - \mu A \frac{\partial v}{\partial x})_W = f_w(v_w, v_p) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

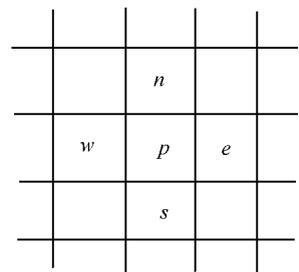


图 1 计算网格
Fig.1 Computational meshes

式中函数取决于所采用的差分格式.若对流项采用逆风格式,扩散项采用中心差分,于是有

$$\left. \begin{aligned} F_{Wu} &= 0.5\rho Q_W[(1+\varepsilon)u_w + (1-\varepsilon)u_p] - \mu A_W \frac{u_p - u_w}{\Delta x} = \alpha u_w + \beta u_p \\ \varepsilon &= \text{sign}(Q_W) \\ \alpha &= 0.5(1+\varepsilon)\rho Q_W + \mu A_W/\Delta x \\ \beta &= 0.5(1-\varepsilon)\rho Q_W - \mu A_W/\Delta x \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

同理有

$$\left. \begin{aligned} F_{Wu} &= f_W(u_w, u_p) & F_{Su} &= f_S(u_s, u_p) \\ F_{Eu} &= f_E(u_p, u_e) & F_{Nu} &= f_N(u_p, u_n) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{又} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{V} d\tau = \frac{\rho \Omega}{\Delta t} (\mathbf{V}^{n+1/2} - \mathbf{V}^n) = \frac{\rho \Omega}{\Delta t} [(u_p^{n+1/2} - u_p^n) \mathbf{i} + (v_p^{n+1/2} - v_p^n) \mathbf{j}]$$

对式(6)离散得 u 分量的方程:

$$\sum_{W, S, E, N} F_{iu} - \frac{\rho}{\Delta t} [(\Omega u_p)^{n+1/2} - (\Omega u_p)^n] = 0 \quad (14)$$

将式(13)代入式(14)得

$$f_p(u_p, u_e, u_w, u_s, u_n) = 0 \quad (15)$$

因此,对每一个控制面计算动量通量,向对应的单元(控制体)叠加,形成以单元变量为基本未知量的代数方程(15).每一个单元都可以建立这样的方程,由此形成一代数方程组,可唯一求解流速 u .同理,对流速 v 亦有

$$f_p(v_p, v_e, v_w, v_s, v_n) = 0 \quad (16)$$

求解线性方程组(15)(16),可得 $\mathbf{V}^{n+1/2}$.

对于方程(10),可用类似的方法离散为

$$\sum_{W, S, E, N} Q_i = \frac{A_S}{\Delta t} (Z^{n+1} - Z^{n+1/2}) \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_W &= f_W\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = f_W(Z_w, Z_p) & Q_S &= f_S\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = f_S(Z_s, Z_p) \\ Q_E &= f_E\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = f_E(Z_p, Z_e) & Q_N &= f_N\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = f_N(Z_p, Z_n) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将式(18)代入式(17)得

$$f(Z_p, Z_w, Z_e, Z_n, Z_s) = 0 \quad (19)$$

对每一个单元,都可建立式(19)的方程.对整个计算区域,形成以单元中心水位为基本未知量的线性代数方程组,可唯一地求解 Z^{n+1} ,由式(9)可求得 u^{n+1}, v^{n+1} .

在建立方程式(15)(16)(19)的过程中,可采用计算每一边的通量,向对应的单元叠加的方法形成.这样可使计算单元编码任意,无序化,方便灵活,易于扩充.式(18)以流量形式表达,与一维计算采用水位和流量作为基本变量的表达形式相同,这样使得二维计算易于同一维计算耦合联解,有关方法将另文讨论.

3 矩阵标识法

本文的求解方法,最终归结为式(15)(16)(19)组成的高阶线性代数方程组的求解.对于宽广的计算区域,单元众多,方程组的阶数很高,是一个巨大的矩阵.但是,该矩阵是高稀疏矩阵,方程组的求解效率决定着方法的成败.对于这一类方程组,可用高效的矩阵标识法^[2]求解.求解要点如下.

对于方程 $AZ = R$ 的SOR法计算公式为

$$Z_i^{(k+1)} = Z_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} Z_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n a_{ij} Z_j^{(k)} - r_i \right) \quad (20)$$

由于 A 是高稀疏矩阵,非零元素很少.按行将 A 的非零元素依次排成一个元素序列 $\{b\} = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$,存放于一维系数数组 $B[1:t]$.对应的元素列标排成序列 $\{d_r\} = \{d_{r1}, d_{r2}, \dots, d_{rn}\}$,存放于标识代码数组 $D[1:t]$.同时把每一行的第一个非零元素在 B 中的序号排成序列 $\{m_i\} = \{m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{in}\}$,存放于行代码

指示数组 $M_i[1:n]$, 其中 t 为矩阵 A 的非零元素总个数, n 为矩阵 A 的阶数. 因此, 利用矩阵标识代码数组 D_r , 行代码指示数组 M_i 和系数数组 B , 可将式 (20) 写成:

$$\left. \begin{aligned} Z_e &= r_i - \sum_{j=M_i(i), D_r(j) \neq i}^{M_i(i+1)-1} b_j \tilde{Z}_{D_r(j)} \\ Z_i^{(k+1)} &= \omega Z_e + (1.0 - \omega) Z_i^{(k)} \\ \tilde{Z}_{D_r(j)} &= \begin{cases} Z_{D_r(j)}^{(k)} & D_r(j) > i \\ Z_{D_r(j)}^{(k+1)} & D_r(j) < i \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由此可见, 采用矩阵标识法求解, 完全可以避免零元素的运算. 采用合适的格式, 矩阵 A 为主对角占优, 迭代求解的收敛速度很快, 从而使得求解代数方程组具有很高的效率.

应该指出, 采用这种方法求解方程组必须事先确定矩阵标识代码数组 D_r , 增加额外的工作量. 但是这些工作是一次性的, 相对于每个步长的方程组求解而言, 可以忽略. 对于二维计算的动边界问题, 不同的处理方法会影响到本方法的效果, 采用“冻结法”可以使本文的方法得到很好的效果.

4 算 例

洪泽湖是淮河流域中最大的湖泊, 它承转淮河上中游约 16 万 km^2 的来水, 在 12.5 m 水位时水面面积 1496 km^2 , 蓄水量 23.6 亿 m^3 , 是我国 4 大淡水湖之一, 是一个集调节淮河洪水, 供给农田灌溉、航运、工业和生活用水于一体, 并结合发电、水产养殖等综合利用型湖泊. 由于湖面宽阔, 风力作用产生环流, 对湖水运动有一定的影响, 由于湖底浅平, 垂向水流运动可以忽略, 所以采用二维浅水方程模拟. 为了模拟洪泽湖的风生环流, 应用本文的方法, 以 500 m \times 500 m 剖分网格, 形成 6174 个计算单元, 在湖面水位 14 m、西北风作用的条件下, 进行模拟计算. 分别在 P-150 和 PIII-700 计算机上运行一个时步长仅需 0.46 s 和 0.066 s, 可见对计



图 2 西北风作用下的洪泽湖流场

Fig.2 Flow pattern of Hongzehu Lake under northwest wind

计算机没有什么要求,计算效率很高.分别以 1 min, 5 min, 10 min 和 15 min 的时步长进行了计算.4 种情况都可得到稳定的结果.前三种情况的计算结果一致,15 min 步长的计算结果显示了差别,说明非线性方程的线性化处理对大步长情况会有误差.5 min 步长计算的流场如图 2 所示,分析图中流场可见,在风力和地形的作用下,风生流场的旋涡成对出现.岸边流速的方向与风速同向,湖心的流速方向与风速相反.岸边的流速大于湖心的流速,形成封闭的环流.环流使得岸边与湖心产生水量交换,有利于湖水的净化.北边的成子湖和洪泽湖的交界处有一对旋涡,对两湖的水量交换起阻碍作用,风生环流对成子湖和洪泽湖的水量交换作用较小.纵观整个流场,流速分布合理.

5 结 语

a. 本模型采用积分型方程的控制体积法,保证了质量和动量的守恒,使最基本的物理规律得到有效的模拟.

b. 模型采用矩阵标识法求解,单元编码可采用任意的无序编码,不影响计算工作量,可方便灵活地组织资料.方程以积分形式导出,可方便地同一维河道系统隐式连接,容易形成一、二维联解的耦合系统.

c. 数值实验表明,本模型具有很好的稳定性,时步长不受 Courant 数的限制.为避免线性化处理的精度损失,时步长不宜过大.

d. 算例模拟计算风生环流的结果表明,本文的求解方法十分有效,能够反映实际,可适用于各种大尺度系统的二维水流模拟.

此外,采用矩形网格对边界的适应性较差,能否采用三角形网格,更好地适应固体边界,有待进一步研究.

参考文献:

- [1] 王船海,程文辉.河道二维非恒定流计算[J].河海大学学报,1987(3):39~53.
 [2] 李光炽,王船海.大型河网水流模拟的矩阵标识法[J].河海大学学报,1995(1):36~43.

Matrix Mark Method for Modelling 2-D Flow Pattern

LI Guang-zhi¹, WANG Chuan-hai¹, ZHOU Jing-yan²

(1. College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;

2. College of Traffic and Ocean Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: By use of the time split method, a conservation difference formula is established to find the solution to the shallow water equation based on the finite volume control method from integral equations. The Matrix Mark Method, adopted to solve algebra equations, improves the efficiency of computation. With the disordering coding method, it is convenient to determine computational meshes. The result shows that the present method is suitable for the modelling of large-scale flow patterns of broad lakes.

Key words: 2-D water flow; numerical model; Matrix Mark Method