

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2012.05.018

道路复合曲线放样元素的快速计算及精度评定

周保兴^{1 2}, 岳建平¹, 郑应新¹

(1. 河海大学地球科学与工程学院, 江苏 南京 210098 ; 2. 山东交通学院土木工程系, 山东 济南 250023)

摘要 : 为了实现道路复杂曲线中桩和边桩坐标、中桩到边桩的坐标方位角等放样元素的快速计算 , 并保证放样元素计算的精度和准确度 , 总结了各种道路曲线放样元素计算的基本理论和方法 , 推导出道路曲线放样元素计算的基本公式 , 提出简明、便捷的复合曲线放样元素计算方法、精度评定方法及评定模型 , 并利用 Visual Basic 语言程序实现了道路曲线放样元素的快速计算。经某复杂立交中完整缓和曲线、非完整缓和曲线计算验证 , 表明该方法计算得到的放样元素与设计值之间的差异仅在毫米级 , 满足道路复杂曲线放样的要求。

关键词 : 道路复合曲线设计 ; 放样元素计算 ; 线形设计 ; 坐标方位角

中图分类号 : U412.34 文献标志码 : A 文章编号 : 1000-1980(2012)05-0576-06

Rapid calculation of road compound curve lofting elements and precision assessment

ZHOU Baoxing^{1 2}, YUE Jianping¹, ZHENG Yingxin¹

(1. School of Earth Sciences and Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China ;
2. Department of Civil Engineering, Shandong Jiaotong University, Jinan 250023, China)

Abstract : In order to achieve rapid calculation of road compound curve lofting elements including the middle and side pile coordinates , and the azimuth from the middle pile to the side pile , and to ensure the calculation precision and accuracy , various basic calculation theories and methods of the road curve lofting elements were summarized and the calculation formula of lofting elements was derived . A simple and convenient method for calculating compound curve lofting elements and the precision assessment methods and models are proposed . The Visual Basic language was used to achieve the rapid calculation of road curve lofting elements . Verified by calculating a complete transition curve and non-complete transition curve in a complex interchange , the proposed method was proven to have a millimeter-level difference between designed and calculated values of the lofting elements , which indicated that the requirements of the road compound curve lofting were fully met .

Key words : road compound curve design ; lofting element calculation ; linear design ; coordinate azimuth

目前在道路设计中 , 尤其在公路立交匝道或互通枢纽设计中 , 为了保证行车的安全性及乘客的舒适性 , 大量使用由圆曲线、完整的缓和曲线及非完整的缓和曲线组成的复合曲线^[1-3] (S 形、卵形等) 道路 , 如图 1 所示。

为了能够对这类复杂的曲线进行放样 , 要求在施工过程中具备详细且精确的点位坐标。在实际工程中 , 工程设计方提供的仅仅是线路的曲线要素 , 比如线路的起点及终点坐标、交点坐标、曲线长、圆曲线半径、

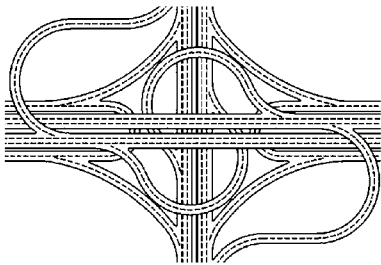


图 1 道路立交复杂曲线示意图

Fig. 1 Schematic map of road interchange compound curves

缓和曲线参数、方向条件等,而不是每个桩位所必需的详细放样元素。为了保质保量地完成工程任务,要求测量技术人员能够根据设计方提供的曲线要素计算出任意里程的放样元素。不仅如此,为了保证放样的精度,在道路曲线的放样过程中除了需考虑放样仪器和放样方法的选择外,曲线要素计算的精度也是影响放样精度的重要因素,必须加以考虑。因此,针对上述情况,笔者研究了道路复合曲线放样元素的快速计算和精度评定方法,并且采用 Visual Basic 语言进行编程计算。

1 放样元素的计算原理

在道路曲线放样元素的计算过程中,由于所遇到的线形有多种,为了计算的便捷,把线路曲线归纳为圆曲线、完整缓和曲线和非完整的缓和曲线,所有复杂的曲线都是这 3 种线形的不同组合^[4-5]。对这 3 种类型的曲线放样元素进行计算,步骤为 (a) 根据线形建立相应的局部坐标系 (b) 求出待求桩号的中桩、边桩在该局部坐标系中的坐标 (c) 进行坐标系转换,将局部坐标系中的坐标转换到施工坐标系当中。

1.1 圆曲线放样元素计算

如图 2 所示,圆曲线中半径 $R_1 = R_2 = R$, S 为圆曲线的长度。首先计算中桩坐标,然后计算中桩→边桩的坐标方位角,在此基础上计算边桩坐标。此处以圆曲线向右转为例(左转情况的计算方法与此相似),根据文献[5-6]进行如下工作。

a. 建立局部坐标系。该圆曲线段上任意一点 P 在局部坐标系中的坐标为 (x, y) :

$$x = R \sin \varphi \quad y = R(1 - \cos \varphi) \quad \varphi = \frac{S_i}{R} \quad (1)$$

其中 S_i 为待求桩号至局部坐标系原点的曲线距离,即曲线段桩号差值。

b. 坐标系转换。中桩桩位在施工坐标系中的坐标 (X, Y) 计算式如下 :

$$\begin{cases} X = x_0 + x \cos T_{\alpha} - y \sin T_{\alpha} \\ Y = y_0 + x \sin T_{\alpha} + y \cos T_{\alpha} \end{cases} \quad (2)$$

式中 : T_{α} ——局部坐标系相对于全局坐标系的坐标方位角 ; x_0, y_0 ——局部坐标原点在施工坐标当中的坐标值。

c. 中桩至边桩坐标方位角计算。首先根据 T_{α} 确定局部坐标系原点处中桩切线的坐标方位角 $T_{\alpha_0} = T_{\alpha} + \pi/2$,在此基础上计算此圆曲线段上任意里程桩号的切线坐标方位角 $T_{\alpha_i} = T_{\alpha_0} - S_i/R$ 。

d. 边桩坐标计算。根据 $(X, Y), T_{\alpha_i}$ 以及左、右边桩至中桩的距离,由坐标增量公式即可计算出左、右桩在全局坐标系中的坐标 (x_L, y_L) 和 (x_R, y_R) :

$$\begin{cases} x_L = X + X \cos \left(T_{\alpha_i} - \frac{\pi}{2} \right) \\ y_L = Y + Y \sin \left(T_{\alpha_i} - \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_R = X + X \cos \left(T_{\alpha_i} + \frac{\pi}{2} \right) \\ y_R = Y + Y \sin \left(T_{\alpha_i} + \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (4)$$

至此,圆曲线段的 $(X, Y), T_{\alpha_i}$ 以及 $(x_L, y_L), (x_R, y_R)$ 便计算出来。

1.2 完整缓和曲线放样元素计算

完整缓和曲线的 $R_1 = \infty, R_2 = R$ 或 $R_1 = R, R_2 = \infty$ 。对于完整缓和曲线,放样元素的计算步骤与圆曲线相同^[7-10]。如图 3 所示, $R_1 = \infty, R_2 = R$ 并且以左转线路为例进行如下工作。

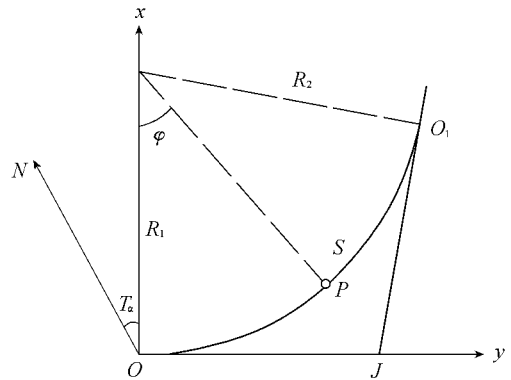


图 2 圆曲线
Fig. 2 Circular curve

a. 建立局部坐标系。以缓和曲线 $R_1 = \infty$ 处为坐标原点, 以与曲线相切的方向为 Y 轴、与 Y 轴相垂直的方向为 X 轴建立局部坐标系, 则该完整缓和曲线段上任意待求中桩在局部坐标系中的坐标如下:

$$\begin{cases} x = l_p - \frac{l_p^5}{40R^2l_0^2} + \frac{l_p^9}{3456R^4l_0^4} \\ y = \frac{l_p^3}{6Rl_0} - \frac{l_p^7}{336R^3l_0^3} + \frac{l_p^{11}}{42240R^5l_0^5} \end{cases} \quad (5)$$

式中: l_p ——待求点 P 相对于局部坐标系原点的曲线距离; l_0 ——坐标原点到无穷大处的缓和曲线长。

b. 坐标转换。方法同上。

c. 坐标方位角计算。首先根据 T_α 确定局部坐标系原点处中桩处切线的坐标方位角 $T_{\alpha_0} = T_\alpha + \pi/2$, 以及任意里程桩号的中桩→右桩的坐标方位角 $T_{\alpha_i} = T_{\alpha_0} - l_p^2/(2Rl_0)$

d. 边桩坐标计算。方法见式(3)、式(4)。

至此, 完整缓和曲线段的 (X, Y) 、 α_i 以及 (x_L, y_L) 、 (x_R, y_R) 便计算出来。

1.3 非完整缓和曲线放样元素计算

在非完整缓和曲线中, $R_1 < R_2$ 且 $R_1, R_2 \neq \infty$ 或者 $R_1 > R_2$ 且 $R_1, R_2 \neq \infty$ 。非完整缓和曲线放样元素的计算是工程中的一大难点^[5]。如图4所示, 以 $R_1 > R_2$ 且 $R_1, R_2 \neq \infty$ 并且左转的曲线为例, 进行如下工作。

a. 建立局部坐标系。如图4所示, 如果顺着大半径 O 端把缓和曲线补充到曲率半径为无穷大处的 O' 点处, 并建立坐标系 $xO'y$ 。计算参数如下:

$$\begin{cases} l = \frac{A^2}{R_2} - \frac{A^2}{R_1} \\ A = \sqrt{\frac{l}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}}} \\ l_0 = \frac{A^2}{R_1} \end{cases} \quad (6)$$

b. 计算起点 O 的坐标。计算方法见式(5)。

c. 坐标转换。由于起点 O 在施工坐标系中的坐标已知 (X_0, Y_0) , 可以利用坐标转换公式求出坐标系的原点 O' 在施工坐标系中的坐标:

$$\begin{cases} X_{O'} = X_0 - x_0 \cos T_\alpha + y_0 \sin T_\alpha \\ Y_{O'} = Y_0 - x_0 \sin T_\alpha - y_0 \cos T_\alpha \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$T_\alpha = T + \beta_2 - \frac{\pi}{2} \quad \beta_2 = \frac{l_0}{2R_1} \rho$$

d. 任意桩号放样元素计算。由式(5)和式(7)可以计算出任意中桩在施工坐标系中的坐标, 继而利用式(3)和式(4)计算边桩坐标、中桩→右桩的坐标方位角等放样元素。

2 复合曲线放样元素计算的精度分析

影响复合曲线放样元素计算精度的因素有2个方面: 曲线数学模型的误差、坐标转换的误差。

2.1 复合曲线放样元素数学模型的误差

a. 缓和曲线的数学模型^[11]。设复合曲线上圆曲线半径为 R , 缓和曲线角为 β , 缓和曲线全长为 l_s , 缓和曲线长为 l_i 。 i 的坐标为

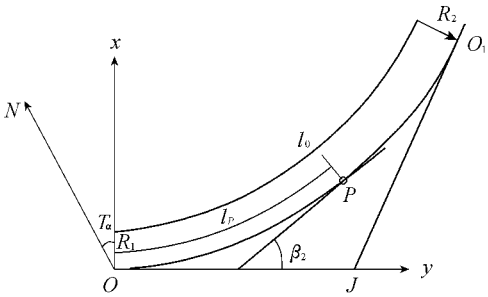


图3 完整缓和曲线
Fig. 3 Complete transition curve

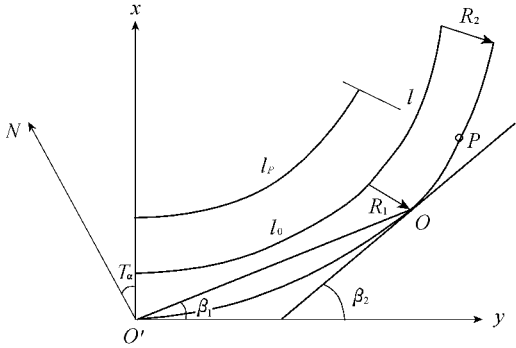


图4 非完整缓和曲线
Fig. 4 Non-complete transition curve

$$X_i = l_i - \frac{l_i^5}{40R^2l_s^2} + \frac{l_i^9}{3456R^4l_s^4} - \frac{l_i^{13}}{599040R^6l_s^6} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}l_i^{4n-3}}{(4n-3)(2n-2)(2Rl_s)^{2n-2}} \tag{8}$$

$$Y_i = \frac{l_i^3}{6Rl_0} - \frac{l_i^7}{336R^3l_0^3} + \frac{l_i^{11}}{42240R^5l_0^5} - \frac{l_i^{15}}{9676800R^7l_0^7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}l_i^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)(2Rl_s)^{2n-1}} \tag{9}$$

其中 $n = 1\ 2\ 3\ \cdots$

由式 8 和式 9 知 ,数学模型高次项对坐标计算的误差影响为

$$\begin{cases} R_x(l) \leq \left| \frac{l_i^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)(2Rl_s)^{2n+1}} \right| \\ R_y(l) \leq \left| \frac{l_i^{4n+1}}{(4n+1)(2n)(2Rl_s)^{2n}} \right| \end{cases} \tag{10}$$

b. 圆曲线的数学模型。设 m 为加设缓和曲线后的切线增长值 , $m = l_s/2$, q 为加设缓和曲线后圆曲线内移量 , $q = l_s^2/(24R)$,则圆曲线上任一点 i 的坐标为

$$X_i = q + \frac{(L_i - 0.5l_s)^2}{2R} - \frac{(L_i - 0.5l_s)^4}{24R^3} + \frac{(L_i - 0.5l_s)^6}{720R^5} - \cdots - \frac{(-1)^{n-1}(L_i - 0.5l_s)^{2n}}{(2n)!R^{2n-1}} \tag{11}$$

$$Y_i = m + (L_i - 0.5l_s) - \frac{(L_i - 0.5l_s)^3}{6R^2} + \frac{(L_i - 0.5l_s)^5}{120R^4} - \cdots - \frac{(-1)^{n-1}(L_i - 0.5l_s)^{2n-1}}{(2n-1)!R^{2n-2}} \tag{12}$$

其中 $n = 1\ 2\ 3\ \cdots$

数学模型的高次项误差影响为

$$\begin{cases} R_x(l) \leq \left| \frac{(L_i - 0.5l_s)^{2n+2}}{(2n+2)!R^{2n+1}} \right| \\ R_y(l) \leq \left| \frac{(L_i - 0.5l_s)^{2n+1}}{(2n+1)!R^{2n}} \right| \end{cases} \tag{13}$$

由式 10 和式 13 可知 ,高次项对缓和曲线要素的影响与 l_i 以及 l_i/R 有关 ,当曲线的 l_i/R 和 l_i 值都较小时 ,高次项对缓和曲线要素的影响也小。

2.2 坐标转换模型的误差

a. 平面坐标转换模型 :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{\text{新}} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} + k\mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{\text{旧}} \tag{14}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{15}$$

式中 $\begin{bmatrix} X\ Y \end{bmatrix}_{\text{新}}$ ——坐标转换后新坐标系下的坐标 $\begin{bmatrix} \Delta X\ \Delta Y \end{bmatrix}$ ——平移因子 $\begin{bmatrix} X\ Y \end{bmatrix}_{\text{旧}}$ ——旧坐标系下的坐标 ; k ——尺度缩放因子 ; \mathbf{R} ——坐标旋转矩阵。

将 \mathbf{R} 代入式 14 线性化后得误差方程 :

$$\mathbf{V} = \mathbf{BdX} - \mathbf{l} \tag{16}$$

如果新、旧坐标系下有 2 个以上(含 2 个)基准点 ,则可按最小二乘准则进行平差计算 ,求出 3 个坐标转换参数。

b. 坐标转换精度评定。设 X'_i, Y'_i 为重合点经坐标转换计算后在施工坐标系内的反算检核坐标 , X_i, Y_i 为重合点在工程坐标系内的坐标 ,令 $v_x = X_i - X'_i, v_y = Y_i - Y'_i$,则坐标转换验后中误差为

$$\begin{cases} \delta_x = \pm \left[\frac{\sum v_x v_x}{n(n-1)} \right]^{1/2} \\ \delta_y = \pm \left[\frac{\sum v_y v_y}{n(n-1)} \right]^{1/2} \end{cases} \tag{17}$$

由式 17 知 , v_x, v_y 越小 , n 越大 ,则 δ_x 和 δ_y 越小 ,转换结果越可靠。

2.3 点位误差的综合评定

由式 13 和 17) 根据误差传播率 ,可得放样点位坐标的误差为

$$\begin{cases} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ \delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} \\ v = \sqrt{R^2 + \delta^2} \end{cases} \quad (18)$$

3 程序实现及算例

利用 Visual Basic 语言对上述算法进行编程实现^[12-13]。为了提高曲线元素的计算精度,程序设计中采用自适应的曲线数学模型高次项指数 n 的确定方式,直到 $R_x^{n-1}(l) - R_x^{n-1}(l) < \sigma/m$ 且 $R_y^{n-1}(l) - R_y^{n-1}(l) < \sigma/m$, 其中 σ 表示放样的精度要求, m 根据具体的工程要求确定,坐标转换采用 2.2 节中的数学模型,并利用分布均匀的多个重合点进行坐标转换,以便减小坐标转换的中误差 δ_x, δ_y 。

如图 5 和图 6 所示,利用所编程序对某复杂立交的放样元素进行计算,并对其中的完整缓和曲线(由圆曲线段过渡到直线段右转)、非完整缓和曲线(由小半径过渡到大半径左转)的计算结果进行比较。计算结果如表 1 所示,计算坐标与设计院提供的原始坐标点位中误差为 1.62 mm。结果表明,该方法可以很好地满足复杂曲线放样元素计算的精度要求。

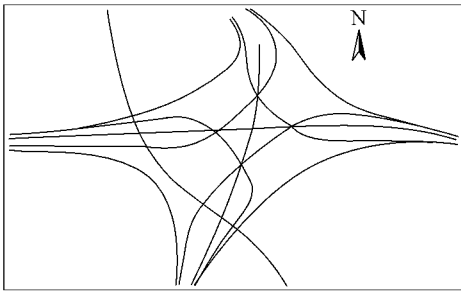


图 5 立交匝道设计曲线
Fig. 5 Design curves of interchange ramp

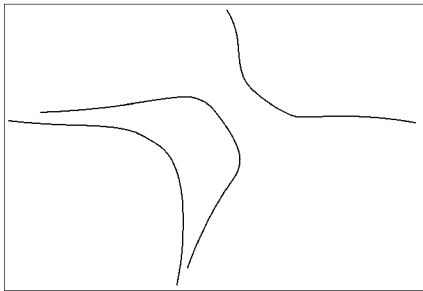


图 6 立交匝道计算曲线
Fig. 6 Calculated curves of interchange ramp

表 1 某复杂立交匝道 A 匝道 PI3 段计算结果汇总

Table 1 Calculation results of segment PI3, ramp A of a complex interchange

桩号	中桩坐标(设计值)/m		中桩坐标(计算值)/m		中桩坐标差值/mm	
	X	Y	X	Y	ΔX	ΔY
K0+000	4 144 214.385	511 663.143	4 144 214.390	511 663.139	-5	4
K0+129.520	4 144 334.305	511 712.018	4 144 334.302	511 712.016	3	2
K0+180.031	4 144 380.009	511 733.523	4 144 380.005	511 733.519	4	4
K0+352.164	4 144 528.371	511 820.495	4 144 528.375	511 820.498	-4	-3
K0+809.403	4 144 918.708	511 750.869	4 144 918.710	511 750.872	-2	-3
K0+946.277	4 144 957.629	511 622.422	4 144 957.625	511 622.420	4	2
K1+006.777	4 144 948.665	511 562.647	4 144 948.662	511 562.650	3	-3

注:坐标中误差 $v_x = 1.25\text{ mm}$, $v_y = 1.03\text{ mm}$, $v = 1.62\text{ mm}$ 。

4 结 语

为了实现线路复杂曲线放样元素的快速计算,并保证复杂曲线放样元素计算的准确性,根据放样元素计算的难点,总结了线路设计中可能遇到的各种线形,并针对各种线形给出放样元素的计算和精度分析方法。主要工作如下:

- a. 研究了圆曲线、完整缓和曲线、非完整缓和曲线等线形中曲线放样元素的详细计算方法。
- b. 研究复杂曲线放样元素计算中的数学模型和坐标转换模型的精度评定方法及提高放样元素精度的方法。
- c. 采用 Visual Basic 语言进行程序设计,实现对线路复杂曲线多个曲线段放样元素的快速计算,包括按固定里程间距的批量计算以及按特定里程的单独计算。

d. 对所计算的曲线放样元素,可以分别采用 excel 表格或者 CAD 图形的形式进行显示,提供良好的输出形式。

参考文献:

- [1] 张正禄.工程测量学[M].武汉:武汉大学出版社,2009:163-170.
- [2] 刘培文.公路施工测量技术[M].北京:人民交通出版社,2003:201-223.
- [3] 王文锐.公路几何线形检测技术[M].北京:人民交通出版社,2000:20-25.
- [4] 赵平.单元解析法解算曲线要素[J].测绘工程,2009,18(1):71-72.(ZHAO Ping. Using the analytical element method to calculate the curve element[J]. Engineering of Surveying and Mapping, 2009, 18(1):71-72.(in Chinese))
- [5] 韩洪泽.复合曲线坐标计算及程序设计[J].山西交通科技,2001(5):37-39.(HAN Hongze. The computation and program design of compound curve coordinates[J]. Shanxi Science & Technology of Communications, 2001(5):37-39.(in Chinese))
- [6] 鲍峰,欧建良.道路曲线的工程测量计算问题[J].同济大学学报:自然科学版,2004,32(11):1485-1488.(BAO Feng,OU Jianliang. Solutions of route curves in engineering survey and calculation[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2004, 32(11):1485-1488.(in Chinese))
- [7] 刘辉华,李仕友,周丽华.道路曲线的中、边桩坐标统一计算模型及应用[J].测绘信息与工程,2002,27(1):17-18.(LIU Huihua, LI Shiyu, ZHOU Lihua. The unified calculating model and application of middle piles and side piles in road curves[J]. Journal of Geomatics, 2002, 27(1):17-18.(in Chinese))
- [8] 高永刚,宋雷,杜传明.道路曲线中、边桩坐标计算及程序设计[J].黑龙江工程学院学报:自然科学版,2005,19(1):8-10.(GAO Yonggang, SONG Lei, DU Chuanming. Programming and calculating of middle piles and sides piles in road curve[J]. Journal of Heilongjiang Institute of Technology: Natural Science, 2005, 19(1):8-10.(in Chinese))
- [9] 唐争气,吴争鸣.道路曲线中桩和边桩的3维坐标的一体化计算[J].测绘通报,2006(12):20-23.(TANG Zhengqi, WU Zhengming. Research on united calculation methods for 3D coordinate of road curve[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2006(12):20-23.(in Chinese))
- [10] 刘祖文.道路曲线详细测设的坐标方位角法[J].武汉城市建设学院学报,1993,10(3):23-26.(LIU Zuwen. Coordinate azimuth method of setting out in road curve[J]. J Wuhan Urban Construction Institute, 1993, 10(3):23-26.(in Chinese))
- [11] 戴水财,李季.曲线放样中的坐标转换及转换精度分析[J].测绘信息与工程,2005,30(2):13-14.(DAI Shuicai, LI ji. Coordinate transfer and its precision analysis in curve layout[J]. Journal of Geomatics, 2005, 30(2):13-14.(in Chinese))
- [12] 冯秀云,夏洋.缓和曲线段任意测点的归化计算[J].测绘信息与工程,2002,27(3):22-24.(FENG Xiuyun, XIA Yang. A converge computing of any point on relax curve[J]. Journal of Geomatics, 2002, 27(3):22-24.(in Chinese))
- [13] 廖正环.公路工程实用电算[M].北京:人民交通出版社,1998:7-35.