

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2011.04.016

软土地基固结 Neumann 随机有限元分析

李 涛,高 健

(浙江水利水电专科学校,浙江 杭州 310018)

摘要:基于 Biot 固结理论和 Neumann 随机有限元理论,提出了沉降固结理论的 Neumann 随机有限元分析方法,并开发了相应的有限元计算程序.以某工程为例,对软土地基固结沉降进行随机有限元分析,探讨了地基沉降与超静孔压随机性状随时间的变化规律以及在空间上的分布特征.计算结果表明,不同随机有限元法沉降标准差的空间分布形式都比较类似,沉降标准差随着深度的增加而减小,并在坡脚附近出现局部减小现象.相同深度时,加固区的沉降标准差要大于非加固区.

关键词:软土地基;沉降;Biot 固结理论;Neumann 随机有限元法;随机性状

中图分类号:TU473

文献标志码:A

文章编号:1000-1980(2011)04-0444-06

在深厚软土地基沉降计算分析中,固结沉降计算是问题的关键所在.自从 Terzaghi 提出一维固结理论以来,土体固结沉降理论研究已经取得了长足的发展.随着计算机技术的迅猛发展,数值计算方法,尤其是 Biot 固结理论的有限单元法在地基沉降分析中得到愈来愈广泛的应用,也有力地推动了固结沉降理论的发展^[1];同时,针对工程中随机因素进行随机有限元分析的方法经过 20 多年的发展后,已成为工程随机力学分析的强有力工具^[2].随机有限元法最初的思路是将 Monte-Carlo 法与有限元法直接结合,即所谓的直接 Monte-Carlo 随机有限元法.但该方法对于大型问题计算量极大,因而很难应用于实际问题.20 世纪 70 年代,Cambou^[3]首次采用一次二阶矩方法研究了线弹性问题.接着 Dendrou 等^[4-5]为解决岩土工程中不确定问题时采用了类似的方法.由于这类方法是将随机变量进行 Taylor 展开分析,因此也称为 Taylor 展开随机有限元法.20 世纪 80 年代初,Handa 等^[6-7]基于随机变量所具有的微小波动性,将一阶和二阶摄动技术引入有限元列式,提出了摄动随机有限元法.他们不仅将摄动随机有限元法应用于复杂静力结构的应力、位移随机性分析,而且还应用于不确定比例阻尼结构系统的振动分析.这些研究确立了摄动随机有限元法在结构静力问题中的适用性,同时也显示了二阶摄动法计算量偏大的缺点.20 世纪 80 年代后期,Shinozuka 等^[8-9]将随机方程的 Neumann 展开法与 Monte-Carlo 随机有限元法相结合,提出了精度和效率较高的 Neumann 随机有限元法,使 Monte-Carlo 法与常规有限元法得以完美结合.赵雷^[10]研究了随机结构弹性动力分析的 Neumann 随机有限元法,认为基于 Neumann 展开式的随机结构分析法可以较好地解决计算效率、精度及变异幅值间的协调性.

近年来的诸多研究都表明岩土工程中存在大量的不确定因素,主要包括土性参数、荷载、边界条件和计算模型等.基于岩土工程的不确定性,采用随机分析的方法对地基沉降进行分析显得更为重要.以往研究主要运用概率分析的方法对地基最终沉降进行研究,并已取得较多成果,但很少对地基的固结沉降进行研究^[11].将随机有限元和 Biot 固结理论结合进行沉降分析的成果还不多见.Nishimura^[12]基于 Biot 固结有限元方程采用 Monte-Carlo 方法对沉降进行了概率分析.郭志川等^[13]基于 Biot 固结理论,采用邓肯-张本构模型,给出了地基固结沉降的 Taylor 随机有限元分析方法.本文基于 Biot 固结理论,采用 Neumann 随机有限元法对地基沉降进行有限元分析,并对点沉降和沉降标准差的空间分布形式进行分析.

1 Neumann 随机有限元法的基本理论

Neumann 随机有限元法是将 Neumann 展开式和 Monte-Carlo 随机有限元法相结合的方法. Neumann 展开式的引入实质上是为了解决矩阵求逆的效率问题.基于 Neumann 级数展开原理,对每次随机抽样,只需计算刚

收稿日期:2010-10-20

基金项目:浙江省科技厅公益类项目(2010C33184);浙江省水利厅科技项目(RC1034)

作者简介:李涛(1977—),男,浙江杭州人,讲师,博士,主要从事软土地基变形数值计算研究. E-mail: litao@zjwhc.com

度矩阵并进行矩阵乘法、求和运算,而无需进行刚度矩阵的求逆计算势必可以大大减少工作量。

在有限元控制方程 $K\Delta u = R$ (K 为刚度矩阵, Δu 为未知量增量向量, R 为节点荷载向量)中,假定荷载 R 为确定值,即 $R = R_0$ (R_0 为按随机变量均值计算得到的等效节点荷载向量)。

在随机变量的影响下,刚度矩阵 K 可以分解为 $K = K_0 + \delta K$ (K_0 为按随机变量均值计算得到的刚度矩阵, δK 为刚度矩阵受随机影响的波动值),则根据 Neumann 级数展开,有

$$K^{-1} = (K_0 + \delta K)^{-1} = (I - P + P^2 - P^3 + \dots)K_0^{-1} \tag{1}$$

其中

$$P = K_0^{-1}\delta K$$

式中 I 为单位矩阵。这样对随机变量进行 Monte-Carlo 抽样时,只需相应地改变 δK 项进行简单的矩阵乘法、求和运算,无需进行矩阵求逆即可求得刚度矩阵 K 。有限元控制方程的解为

$$\Delta u = \Delta u_0 - P\Delta u_0 + P^2\Delta u_0 + \dots \tag{2}$$

其中

$$\Delta u_0 = K_0^{-1}R$$

若令

$$\Delta u_r = -K_0^{-1}\delta K\Delta u_{r-1} \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \tag{3}$$

即有递推公式

$$\Delta u = \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \dots = \sum_{r=0} \Delta u_r \tag{4}$$

2 基于 Biot 固结理论的 Neumann 随机有限元法

Biot 固结理论考虑了固结过程中的土体平均总应力随时间的变化过程,从较严格的固结机制出发导出了可准确反映孔隙水压力与土骨架变形相互关系的三维固结方程^[14]。

Biot 固结方程组包括 2 个方程,即平衡方程和连续性方程,利用物理方程、几何方程和有效应力原理,可将平衡方程和连续方程统一用位移增量 Δw 和孔压增量 Δp 来表示。根据虚功原理和伽辽金加权残值法对平衡方程和连续方程进行空间和时间上的离散,并按单元集成,即可得到整体有限元控制方程

$$\begin{bmatrix} K_D & K_C \\ K_C^T & -\theta\Delta t K_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_m \\ R_s \end{bmatrix} \tag{5}$$

即

$$K\Delta u = R \tag{6}$$

式中: K_D ——变形场对应的刚度矩阵; K_C ——渗流场和变形场耦合矩阵; K_S ——渗流场导水矩阵; θ ——时间差分格式相关量,一般可在 0.5 ~ 1.0 之间取值; Δt ——计算时间步长; Δw ——整体节点位移增量矩阵; Δp ——整体节点孔压增量矩阵; R_m ——整体等效节点荷载增量矩阵; R_s ——流量增量矩阵。式(6)是 Biot 固结有限元法的基础。

采用 Neumann 随机有限元法处理 Biot 固结问题时,控制方程的求解按 Neumann 有限元法基本理论的递推公式(4),并考虑随机场影响^[15]的基于 Biot 固结理论的 Neumann 随机有限元法的计算过程可描述如下:

- 随机场划分和随机有限元预处理,设随机变量个数为 l ,随机变量均值矢量为 $(X^1, X^2, \dots, X^l)^T$;
- 计算每个随机变量对应的单元自协方差矩阵 $C_{N \times N}^i$,并求得其对应的特征值矩阵 $\lambda_{N \times N}^i$,特征向量矩阵为 $T_{N \times N}^i$,其中 N 为单元总数, $i = 1, 2, \dots, l$ 。
- 根据随机变量均值来计算 K_0 和 R ,由此求得当前计算时间步的未知量增量矢量 $\Delta u_0 = K_0^{-1}R$ 。
- 用随机数产生程序对每个随机变量生成 M 组独立正态分布随机向量 $(\alpha_{N \times 1}^1, \alpha_{N \times 1}^2, \dots, \alpha_{N \times 1}^l)$,根据 $\beta_{N \times 1}^i = T_{N \times N}^i (\lambda_{N \times N}^i)^{1/2} \alpha_{N \times 1}^i + X^i \xi_{N \times 1}$ ($i = 1, 2, \dots, l$)得到 M 组相关的正态分布随机向量 $(\beta_{N \times 1}^1, \beta_{N \times 1}^2, \dots, \beta_{N \times 1}^l)$,其任一 $\beta_{N \times 1}^i$ 的自协方差矩阵为 $C_{N \times N}^i$,均值为 X^i ,其中 $\xi_{N \times 1}$ 为所有元素为 1 的列矢量。
- 取一组随机向量 $(\beta_{N \times 1}^1, \beta_{N \times 1}^2, \dots, \beta_{N \times 1}^l)$ 作为有限元随机变量输入,计算随机变量影响下的刚度矩阵 K ,则可得到刚度矩阵波动值 $\delta K = K - K_0$ 。
- 根据递推公式,计算未知量增量的波动修正值 $\Delta u_r = -K_0^{-1}\delta K\Delta u_{r-1}$ 。
- 重复 f 步骤直至 Δu_r 足够小,则随机变量影响下的 $\Delta u = \sum_{r=0} (-1)^r \Delta u_r$ 。

h. 重复 e~g 步骤,进行 M 组($\beta_{N \times 1}^1, \beta_{N \times 1}^2, \dots, \beta_{N \times 1}^M$)输入计算后,即可得到计算时间步的 M 次模拟的计算结果 Δu ,对其进行各阶矩统计和概率分布模拟即可得到未知量的均值和方差等的随机分布.

本文根据以上研究,考虑到大型矩阵计算的便利性,采用 Matlab 程序研制了基于 Biot 固结理论的 Neumann 随机有限元法.

3 实例分析

乐清市旭阳路胜利塘段位于围垦仅数年的滨海淤积滩涂上,土性差异性大.地基为均质饱和正常固结土,本构关系为线弹性.地基土分为 2 层.第 1 层土弹性模量为 948 kPa,泊松比为 0.301,竖向和水平向渗透系数分别为 1×10^{-8} , 1×10^{-6} m/s,密度为 1630 kg/m³;第 2 层土弹性模量为 1605 kPa,泊松比为 0.301,竖向和水平向渗透系数分别为 1×10^{-8} , 1×10^{-6} m/s,密度为 1740 kg/m³.

实际工程有限元计算往往会面临单元剖分过多、计算量巨大的问题.尤其是常见的砂井或塑料排水板处理软土地基沉降计算问题(一般将塑料排水板等效为砂井计算,因此以下统称为砂井),若要完全真实反映砂井的效应,则会导致单元划分过密.为了实际应用可行与方便,并考虑到砂井处理软基机制和地基问题的实际情况,本文将砂井处理的软土地基按平面变形和空间渗流(PDSS)问题进行分析^[1],并将砂井加固区土体等效为竖向渗透系数强化的层状地基,以减少计算工作量,加固区土体竖向渗透系数为 3×10^{-7} m/s.计算域和有限元网格如图 1 所示.边界条件为:左、右面 y 向固定, z 向自由,不透水;上表面 y 向固定, z 向自由,透水;下表面 y 和 z 向均固定且不透水.加载曲线如图 2 所示.

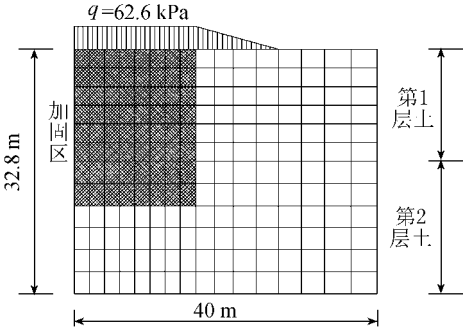


图 1 有限元网格

Fig. 1 Finite element mesh

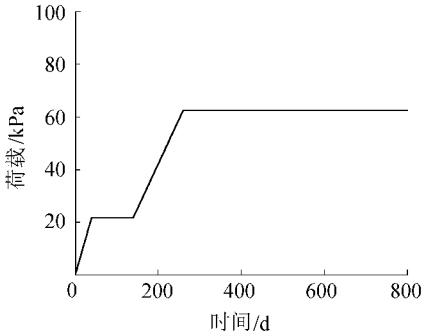


图 2 加载曲线

Fig. 2 Loading curve

根据经验^[16],随机有限元参数取 3 个随机变量,即弹性模量 E 、泊松比 μ 和加固区的竖向渗透系数 k_z ,其变异系数均取为 0.1.根据以往研究结果^[17-19],土层水平方向的相关距离取为 40 m,土层垂直方向的相关距离取为 1 m,控制参数取 2.

采用商业有限元计算软件 Plaxis 验证随机有限元法的计算结果.从图 3 可以看出,确定性有限元法计算结果与 Neumann 随机有限元法计算结果的均值非常接近,而与 Plaxis 计算结果相比,加载期略有分离,固结发展期趋向一致.这是由于 Neumann 随机有限元法和确定性有限元法采用了相同的土体本构模型和有限元计算模型,而目前通用商业岩土问题有限元程序均不具备随机性状计算分析的模块.从本文自编随机有限元程序均值计算结果与 Plaxis 有限元解的对比也可以看出,本文随机有限元程序计算结果可靠.

采用 Monte-Carlo 随机有限元法和 Neumann 随机有限元法分别进行有限元计算,计算时间分别为 97, 41 min. Monte-Carlo 随机有限元法和 Neumann 随机有限元法最终加载时刻(第 260 天)和最终计算时刻(第 980 天)的沉降标准差等值线如图 4 和图 5 所示.采用 Neumann 随机有限元法计算最终加载时刻和最终计算时刻的孔压标准差等值线如

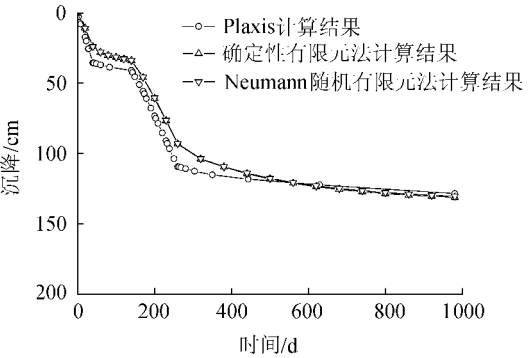


图 3 最大沉降点沉降曲线

Fig. 3 Settlement curve at maximum settlement point

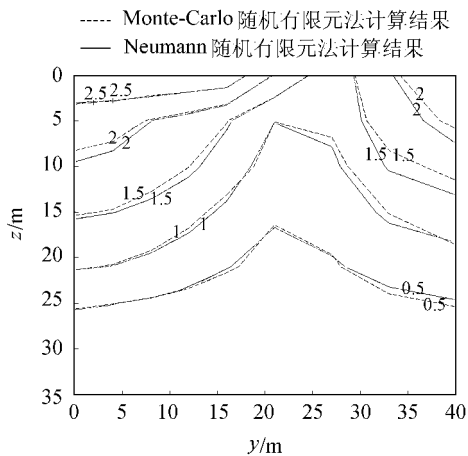


图 4 最终加载时刻沉降标准差等值线(单位 :cm)
Fig. 4 Contours of standard deviation of settlement at final load time(unit : cm)

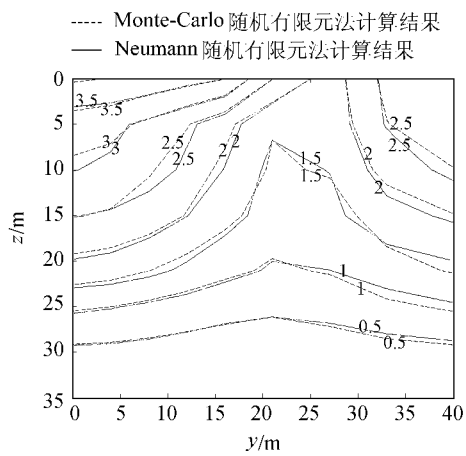


图 5 最终计算时刻沉降标准差等值线(单位 :cm)
Fig. 5 Contours of standard deviation of settlement at final calculation time(unit : cm)

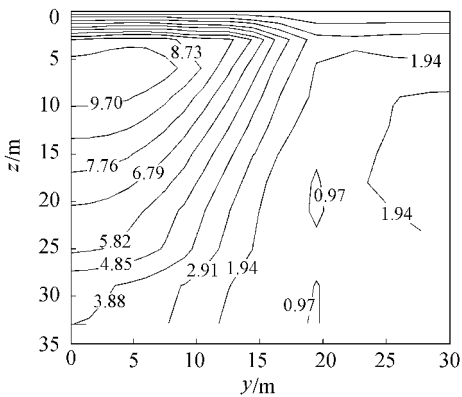


图 6 最终加载时刻孔压标准差等值线(单位 :kPa)
Fig. 6 Contours of standard deviation of pore pressure at final load time(unit : kPa)

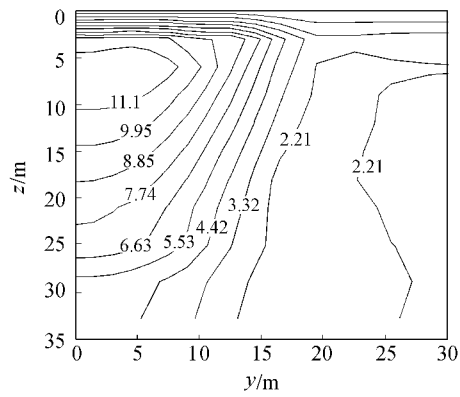


图 7 最终计算时刻孔压标准差等值线(单位 :kPa)
Fig. 7 Contours of standard deviation of pore-pressure at final calculation time(unit : kPa)

图6和图7所示.从图4~图7可以看出,2种随机有限元法计算得到的沉降标准差和孔压标准差的空间分布形式非常接近,这说明采用 Neumann 级数展开的迭代解法对固结问题随机性状计算影响较小.

从沉降标准差的计算结果可知,沉降标准差随着深度的增加而减小,相同深度时,加固区的沉降标准差要大于非加固区,沉降标准差在模型中部(坡脚附近)出现局部减小现象.这说明,加固区内沉降受土体参数影响较大,并且坡脚处的应力集中现象导致沉降标准差在坡脚附近出现局部减小现象.

从孔压标准差的计算结果可知,在近地面的表层,孔压标准差增大非常快,说明近地面处是孔压变化受土性参数影响最直接最显著的地方,而在一定深度下,孔压的变异性逐渐减弱,并且分布上也更为稳定.

由于对矩阵进行求拟优化计算,Neumann 随机有限元法可以提高 1 倍左右的效率.

4 结 论

a. Neumann 随机有限元法是解决岩土工程中土体参数存在大量不确定性因素问题的强有力工具之一.本文基于 Biot 固结理论,提出了地基固结沉降的 Neumann 随机有限元分析方法,并研制了相应的计算程序.

b. 从最大沉降点的沉降-历时曲线可以看出,本文 Neumann 随机有限元计算方法的计算结果与商业有限元计算软件 Plaxis 计算结果比较接近.

c. Monte-Carlo 法和 Neumann 随机有限元法得到的沉降标准差的空间分布形式比较类似,即都是沉降标准差随着深度的增加而减小,土体参数随机性对地表沉降值的影响较大.

d. 相同深度时,土体加固区的沉降标准差要大于非加固区,这说明土体参数随机性对加固区沉降发展的影响较大.

e. 沉降标准差在坡脚附近出现的局部减小现象说明加载单元与非加载单元交接处沉降受土体参数随机性的影响要小一些.

f. 采用对矩阵进行求拟的优化计算, Neumann 随机有限元法比最直接的 Monte-Carlo 随机有限元法可以提高 1 倍左右的效率.

参考文献:

- [1] 谢康和,周健.岩土工程有限元分析理论与应用[M].北京:科学出版社,2002:223-292.
- [2] 刘宁.三维可分向量随机场局部平均的三维随机有限元及可靠度计算[J].水利学报,1995(6):75-82.(LIU Ning. 3-D stochastic FEM and reliability calculation based on vector separatable field local average[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1995(6): 75-82.(in Chinese))
- [3] CAMBOU B. Application of first order uncertainty analysis in the finite element method in linear elasticity[C]//Proceedings of the Second International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soils and Structural Engineering. Aachen [s.n.], 1975: 67-88.
- [4] DENDROU B A, HOUSTIS E N. An inference finite element method for field application, applied mathematical modeling[M]. Guildford: [s.n.], 1978: 49-55.
- [5] BAECHER G B, INGRA T S. Stochastic FEM in settlement prediction[J]. Journal of Geotech Engineering, 1981, 107(2): 449-463.
- [6] HANDA K, ANDERSON K. Application of finite element methods in statistical analysis of structures[C]//Proceedings of the Third International Conference on Struct Safety and Reliability. Trondheim [s.n.], 1981: 409-417.
- [7] HISADA T, NAKAGIRI S. Stochastic finite element method developed for struct. safety and reliability[C]//Proceedings of the Third International Conference on Struct Safety and Reliability. Trondheim [s.n.], 1981: 395-408.
- [8] SHINOZUKA M, DEODATIS G. Response variability of stochastic finite element systems[J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 1988, 114(3): 499-519.
- [9] YAMAZAKI F, SHINOZUKA M, DASUPTA G. Neumann expansion for stochastic finite element analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 1988, 114(8): 1335-1354.
- [10] 赵雷.随机参数结构动力分析方法及地震可靠度研究[D].成都:西南交通大学,1996.
- [11] 傅旭东,茜平一,刘祖德.浅基础沉降可靠性的 Neumann 随机有限元分析[J].岩土力学,2001,22(3):285-290.(FU Xu-dong, QIAN Ping-yi, LIU Zhu-de. Neumann stochastic finite element analysis for reliability of settlement of the shallow foundation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2001, 22(3): 285-290.(in Chinese))
- [12] NISHIMURA S, FUJII H, SHIMADA K. FEM consolidation analysis considering variability of soil parameters[C]//Applications of Statistics and Probability. Rotterdam: Balkema, 1995: 85-92.
- [13] 郭志川,刘宁.地基固结沉降随机有限元计算和可靠度分析[J].岩土力学,2001,22(4):481-485.(GUO Zhi-chuan, LIU Ning. The SFEM analysis and reliability assessment of consolidation settlement based on Biot consolidation theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2001, 22(4): 481-485.(in Chinese))
- [14] 龚晓南.高等土力学[M].杭州:浙江大学出版社,1996.
- [15] 陈虬,戴志敏.等参局部平均随机场和 Neumann 随机有限元法[J].计算结构力学及其应用,1991,8(4):397-402.(CHEN Qiu, DAI Zhi-min. The isoparametric local average random field and Neumann stochastic finite element method[J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1991, 8(4): 397-402.(in Chinese))
- [16] 陈晓平,黄国怡,梁志松.珠江三角洲软土特性研究[J].岩石力学与工程学报,2003,22(1):137-141.(CHEN Xiao-ping, HUANG Guo-yi, LIANG Zhi-song. Study on soft soil properties of the pearl river delta[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(1): 137-141.(in Chinese))
- [17] 刘春原,阎澍旺.岩土参数随机场特性及线性预测[J].岩土工程学报,2002,24(5):588-591.(LIU Chun-yuan, YAN Shu-wang. Characteristic of the random field of geotechnical parameters and linear prediction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(5): 588-591.(in Chinese))
- [18] 包承纲.地基工程可靠度分析方法研究[M].武汉:武汉测绘科技大学出版社,1997:1-18.
- [19] 李涛.软土路基大变形固结随机有限元分析[D].杭州:浙江大学,2006.

Neumann stochastic finite element analysis for consolidation of soft soil foundation

LI Tao , GAO Jian

(Zhejiang Water Conservancy and Hydropower College , Hangzhou 310016 , China)

Abstract : The Neumann stochastic finite element method for predicting the consolidation settlement of a foundation was developed based on the Biot ' s consolidation theory , and a finite element program was designed to analyze the road embankment. Through an example of the practical project , the consolidation settlement of a soft soil foundation was analyzed using the Neumann stochastic finite element method , and the change over time and spatial distribution of the foundation settlement and excess pore water pressure were discussed. The calculated results show that the spatial distribution of the standard deviation of settlement obtained by different stochastic finite element methods is similar. The standard deviation of settlement decreases with the increase of depth , and has a local minimum near the slope foot. The standard deviation of settlement in the reinforced area is larger than that in the unreinforced area under the same depth.

Key words : soft soil foundation ; settlement ; Biot ' s consolidation theory ; Neumann stochastic finite element method ; stochastic characteristics

《水资源保护》征订启事

中国科技核心期刊 RCCSE 中国核心学术期刊

《水资源保护》是河海大学和中国水利学会环境水利研究会主办的科学技术期刊 ,创刊于 1985 年 ,双月刊 .国内外公开发行 ,国内统一连续出版物号 :CN32-1356/TV.

《水资源保护》主要刊登与水资源保护有关的基础研究 ,应用技术 ,工程措施 ,综合述评 ,专题讲座 ,国外动态 ;书刊评介 ,科技简讯 ,水资源管理、评价、监测、优化配置 ,节水技术 ,水环境污染控制等方面的文章 .近年来 ,重点关注与水有关的生态环境领域中的研究方向 ,新增设相关的基础研究、防治技术、城市水环境治理等内容 .

主要读者对象 :与水资源保护工作有关的工程技术人员、科研人员、管理人员以及大专院校的师生 .

《水资源保护》邮发代号 28-298 ,双月刊 ,2012 年每期定价 12 元 ,全年共 72 元 ,每逢单月 30 日出版 .可在全国各地邮局订阅 ,也可直接与编辑部联系订阅 .

地 址 210098 南京市西康路 1 号 河海大学《水资源保护》编辑部

电话/传真 (025)83786642 E-mail :bh@hhu.edu.cn

网 址 :kbb.hhu.edu.cn/web/indexbh.asp ? d_id = 34