

非线性差分系统稳定性概述*

朱伟, 杨晓松, 黄琼

(重庆邮电学院 非线性系统研究所, 重庆 400065)

摘要:随着工程理论的发展,在控制系统中,稳定性非常重要。人们对近期发展起来的非线性差分系统稳定性进行了大量的研究。介绍了有关非线性差分系统稳定性的近期研究情况,并总结了一些判定非线性差分系统稳定性的重要方法,最后给出了几类非线性差分系统及其相应的研究方法和重要结果。

关键词:非线性差分系统;稳定性;Lyapunov 理论

中图分类号:O241.84 **文献标识码:**A **文章编号:**1004-5694(2003)02-0064-03

An Overview of the Stability of Nonlinear Difference Systems

ZHU Wei, YANG Xiao-song, HUANG Qiong

(Institute for Nonlinear Systems, CUPT, Chongqing 400065, P. R. China)

Abstract: With the development of engineering theory, the stability is very important in controlling system. In this paper, we introduce the important area of research on the stabilities of nonlinear difference systems in a sense of Lyapunov in the last few years. And their primary results are summarized as well. Also some important methods and examples are given.

Key words: nonlinear difference system; stability; Lyapunov parameter

0 引言

近年来差分系统一直是广大学者关注的一个方向。随着差分方程理论的不完善,它将在应用数学、应用分析领域里占据不可忽视的地位。系统的稳定性是系统正常运行的基本前提,因而系统的稳定性历来是人们关注的焦点。稳定性概念的出现,有悠久的历史,1893年,俄国数学力学李雅普诺夫(Lyapunov)才在其博士论文“运动稳定性的一般问题”里给出运动稳定性的严格的精确的数学定义和一般方法,从而奠定了稳定性的理论基础。随着科技、工程理论不断发展,特别在控制系统中,人们越来越了解到稳定性的重要意义。因此,有关系统稳定性的一些重要结果也应运而生。本文的目的主要

是对发展相对较晚的一些非线性差分系统的稳定性给予介绍,总结一些研究系统Lyapunov意义下稳定性的重要结果。

1 Lyapunov 意义下稳定性研究方法

在研究系统Lyapunov意义下稳定性的方法中,一次近似理论和直接法(即Lyapunov第一、第二方法)是大家所熟悉的,因此在这里我们不再重述。众所周知,Lyapunov方法一直是处理系统稳定性的核心方法,但对第一方法来说只是一种理论上近似,而且对于临界稳定的情况没有办法处理;第二方法在实际运用中由于对Lyapunov函数至今还没有一般的构造方法,因而具体操作也是非常困难的。因此,人们在运用Lyapunov方法的同时也在寻找其它的

* 收稿日期:2002-05-07

作者简介:朱伟(1976-),男,四川莱县人,重庆邮电学院硕士研究生,研究方向为控制系统稳定性理论;杨晓松,教授,硕士生导师。

一般方法。以下我们将对两类比较典型的方法加以概述。

1.1 KAM 理论的运用

我们以 Hamilton 函数为例对 KAM 理论作一简单介绍。如果 Hamilton 函数 H 可以分出一项小扰动 h :

$$H = H_0 + h$$

其中 H_0 是可积的,则可以变换到作用角度 θ ,求得 N 个频率,限制在 N 维环面上。我们把 KAM 理论的大意及物理后果表述如下:

KAM 理论有两个条件,即:第一、Hamilton 函数中可分离与不可积的扰动项很小;第二、未扰动的可积 Hamilton 函数 H_0 对应的频率满足不相关条件;则 Hamilton 函数 H 的绝大多数解(除去测度为零的集合)仍然留在 N 维环面上。从以上可以看出 KAM 理论恰能讨论系统的稳定性。但它不能用此法进一步研究系统的渐近稳定性。

1.2 直接分析

这种方法建立在结构相对较简单的系统上,直接利用数学分析的思想,讨论解的极限行为。这种方法的一个重要辅助工具就是半环理论(对二阶系统特别有效)。下面我们以二阶系统为例给出相关定义。

考虑二阶差分方程描述的系统:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

其中 $f: R \times R \rightarrow R$ 。假设 $\bar{x}$ 为式(1)的平凡解,即 $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x})$ 。

定义 1 正半环(A positive Semi-cycle)

方程(1)的解的一正半环由这样一些项 $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ 构成,其中每一项都大于或等于 $\bar{x}$,且当 $l \geq -1$ 时,有 $x_{l-1} < \bar{x}$;当 $m \leq \infty$ 时,有 $x_{m+1} < \bar{x}$ 。

定义 2 负半环(A Negative Semi-cycle)

方程(1)的解的一负半环由这样一些项 $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ 构成,其中每一项都小于 $\bar{x}$,且当 $l \geq -1$ 时,有 $x_{l-1} \geq \bar{x}$;当 $m \leq \infty$ 时,有 $x_{m+1} \geq \bar{x}$ 。

在利用半环理论研究解的极限行为时,我们常先判断半环的个数(指只有一个环,还是多个环),然后判断每一个环所包含的最少项或最多项(也称为环的长度)。前者比较容易判断,对于后者我们以式

(1)描述的系统(1)为例给出一些结果^[1]。

定理 1 若 $f(x, y)$ 对每一固定的 y 关于 x 递减,且对每一固定的 x 关于 y 递增,则系统(1)的任意非平凡解的半环长度为 1(不考虑第一个半环)。

定理 2 若 $f(x, y)$ 关于 x, y 都递减,则系统(1)的任意非平凡解的半环长度不超过 2。

由此得到一个关于判定平凡解全局渐近稳定的结果^[2]。

定理 3 若 $f(x, y)$ 关于 x, y 都严格递减, $\bar{x}$ 为系统(1)的平凡解,记 $h(x) = \min\{f(f(x, x), \bar{x}), f(f(\bar{x}, x), f(x, x))\}$,若 $\forall x \in (0, \bar{x})$,有 $h(x) > x$,则平凡解 $\bar{x}$ 全局渐近稳定。

此定理中 $h(x)$ 的构造是讨论系统稳定性的关键。一般而言,在直接分析法中,若我们要以半环理论作为辅助工具,则最重要、最困难的地方和 Lyapunov 第二方法中构造 Lyapunov 函数一样在于对辅助函数 $h(x)$ 的构造,对 $h(x)$ 构造的一般原则是使得从某一正(负)半环开始,连续正(负)半环的上(下)界构成的序列 $\{I_n\}$ 严格单调递减(递增)。

2 典型差分系统及研究方法

2.1 递归差分方程(RDE)所描述的系统^[1-7]

考虑到这一类系统的稳定性,我们常把 Lyapunov 一次近似理论与一般分析方法相结合来进行研究。如文献[8]中研究的方程:

$$x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n, \quad \alpha \in [0, \infty) \quad (2)$$

初始条件 x_{-1}, x_0 为任意正实数。由 Lyapunov 一次近似理论知道

1) 当 $\alpha > 1$ 时,平凡解 $\bar{x} = \alpha + 1$ 局部渐近稳定;

2) 当 $0 \leq \alpha < 1$ 时,平凡解 $\bar{x} = \alpha + 1$ 不稳定;

而当 $\alpha = 1$ 时,我们运用直接分析方法,运用半环理论得出:

1) 当方程(2)的所有正解 $\{x_n\}$ 只有一个半环时,则 $\{x_n\}$ 单调趋于唯一的平凡解 $\bar{x} = 2$;

2) 当方程(2)的所有正解 $\{x_n\}$ 至少有两个半环时,则 $\{x_n\}$ 趋于一个周期为 2 的解。

2.2 差分方程所描述的二维非线性系统^[8]:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= a_1 x_n + b_1 y_n + f(c_1 x_n + c_2 y_n) = F_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= a_2 x_n + b_2 y_n + f(c_1 x_n + c_2 y_n) = F_2(x_n, y_n) \end{aligned} \right\}, n = 0, 1, \dots$$

其中 $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2)$ 为实数, $f \in C^\infty(R, R)$, 且 $f \neq$

$0, f(0)=0, f'(0)=0$, 并记 $F=(F_1, F_2)$, 对这类系统, 我们从条件知道 f 是关于 x_n, y_n 线性组合的高阶无穷小, 如果 $F=(F_1, F_2)$, 满足条件 (H): “ F 是椭圆形平凡解处的保面积映射, 且特征值 $\lambda, \bar{\lambda}$ 使得 $\lambda^k \neq 1, k=3, 4$ ”, 则我们可以运用 KAM 理论研究平凡解的稳定性。在具体运用中我们应注意以下 2 个关键步骤:

1) 假设 F 满足 (H), 推出 $a_i, b_i, c_i (i=1, 2)$ 应满足的关系;

2) 对系统进行适当变换化成 Birkhoff 规范性。

2.3 生态模型 (Biology models)^[9,10]

对这一类模型一般采用 Lyapunov 直接法。在一定的条件下构造出 Lyapunov 函数。如文献 [11] 中的 Lotka-Volterra 型离散模型:

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp \{r_i(k) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)x_j(k)\}, i=1, \dots, n \quad (3)$$

式 (3) 中, $x_i(k)$ 表示种群 i 在第 k 代的密度; $r_i(k)$ 表示种群 i 在第 k 代的增长率; $a_{ij}(k)$ 表示种群之间或种群内部的竞争系数。并且假设 $\{r_i(k)\}, \{a_{ij}(k)\}, (i, j=1, 2, \dots, n)$ 有界。

研究式 (3) 的稳定性时, 我们先引入变换

$$u_i(k) = x_i(k) - x_i^*(k), i=1, \dots, n$$

$x_i^*(k)$ 为式 (3) 的一正解。则式 (3) 变为:

$$u_i(k+1) = x_i^*(k+1) \left[(1 - a_{ii}(k)x_i^*(k)) \frac{u_i(k)}{x_i^*(k)} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}(k)u_j(k) + \frac{f_i(k, u(k))}{x_i^*(k)} \right], i=1, \dots, n$$

式 (4) 中, $f_i(k, u(k))$ 为 $\|u\|$ 的高阶无穷小, 对任意的 k 都成立。

这时我们构造 Lyapunov 函数

$$V(u(k)) = \sum_j^n c_j \left| \frac{u_j(k)}{x_j^*(k)} \right|$$

其中, $c_j > 0$, 且对足够大的 k 满足:

$$c_i a_{ii}(k) > \sum_{j=1, j \neq i}^n c_j |a_{ji}| + v, v > 0, i=1, \dots, n$$

则根据 Lyapunov 直接法的思想沿着式 (4) 的解计算差分

$$\Delta V = V(u(k+1)) - V(u(k))$$

在另外附加条件下判定 ΔV 的负定性, 进而判断式 (3) 描述的系统 (3) 的稳定性。

参 考 文 献

- [1] KOSMALA W A, KULENOVIC M R S, LADAS G, et al. On the recursive sequence $y_{n+1} = (p + y_{n-1}) / (qy_n + y_{n-1})$ [J]. J. Math. Anal. Appl. 251, 2000, 251(2): 571-586.
- [2] DEVAULT R, GALMINAS L. Global stability of $x_{n+1} = A/x_n^p + 1/x_{n-1}^{1/p}$ [J]. J. Math. Anal. Appl. 1999, 231(2): 459-466.
- [3] EL-OWAIDY H M, EL-AFIFI M M. A note on the periodic cycle of $x_{n+2} = (1 + x_{n+1}/x_n)$ [J]. Appl. Math. Comput, 2000, 109(2, 3): 301-306.
- [4] MONA T. ABOUTALEB, EL-SAYED M A, HAMZA Alaa E. Stability of the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha - \beta x_n) / (\gamma + x_{n+1})$ [J]. J. Math. Anal. Appl. 2001, 26(1): 126-133.
- [5] GRAEF J R, QIAN C, SPIKES P W. Stability in a population model [J]. Appl. Math. Comput, 1998, 89(1-3): 119-132.
- [6] AMLEH A M, GROVE E A, LADAS G. On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n$ [J]. J. Math. Anal. Appl. 1999, 233(2): 790-798.
- [7] EL-OWAIDY H M, RAGAB A A, EL-AFIFI M M. On the recursive sequence $x_{n+1} = A/x_n^p + B/x_{n-1}^q + C/x_{n-2}^s$ [J]. Appl. Math. Comput, 2000, 112(2, 3): 277-290.
- [8] PAPASCHINOPOULOS G. Stability of a class nonlinear difference Equations [J]. J. Math. Anal. Appl. 1999, 230(1): 211-222.
- [9] WANG Wendi, LU Zhengyi. Global stability of discrete models of Lotka-Volterra type [J]. Nonlinear Anal. 1999, 35(8): 1019-1030.
- [10] GOPALSAMY K, LIU Pingzhou. Persistence and global stability in a population model [J]. J. Math. Anal. Appl. 1998, 224(1): 59-80.

(编辑: 郭继笃)