第 10 卷 第 19 期 2010 年 7 月
1671-1815(2010)19-4735-02

科 学 技 术 与 工 程
Scie nce Technology and Engineering

Vol. 10 No. 19 July 2010
ⓒ 2010 Sci. Tech. Engng.

两种局部算子的性质

杨凯凡

(陕西理工学院数学系,汉中 723001)

摘 要 给定矩阵 A,若矩阵 P 满足 $PA=A$,则称 P 为局部恒等算子,若满足 $P^2A=PA$,则称 P 是局部幂等的。给出两类局部算子的一些性质:P 局部恒等当且仅当 $P-I=U(I-AA^-)$;P 局部幂等的当且仅当 $P^2-P=U(I-AA^-)$,以及他们之间的关系。局部恒等算子显然是局部幂等。

关键词 局部恒等算子 局部幂等算子 斜投影

中图法分类号 O177.6; **文献标志码** A

设 A 为设给定的 $m\times n$ 矩阵,$\prod$表示由 A 的列向量张成的子空间,对于 $m\times n$ 矩阵 P,如果满足对任意 $a\in A$,都有 $Pa=a$,则称 P 是局部恒等的,即

$$PA=A \tag{1}$$

若 P 满足对任意 $a\in A$,都有 $P^2a=a$,则称 P 是局部幂等的,即

$$P^2A=PA \tag{2}$$

显然单位矩阵 I 满足式(1)和式(2)且 AA^- 满足式(1),此处 A^- 表示 A 的广义逆,而式(2)对任意的幂等矩阵 P 都满足。式(1)在定义$\prod$上的投影时起重要的作用,是定义$\prod$上的投影的一个条件,也是决定线性变换的不变子空间以及得出一些特殊结论的条件[1,2]。而式(2)在建立非负矩阵间的部分有序性中起着重要的作用[2]。

主要结论及其证明

定理 1 P 对于$\prod$ 是局部恒等的当且仅当 $P-I=U(I-AA^-)$(U 是 $m\times n$ 矩阵)。

证明 充分性 $(P-I)A=U(I-AA^-)=U(A-AA^-A)=0$,所以 $PA=A$,即 P 是局部恒等的。

必要性 若 $PA=A$,则 $PA=AA^-A$, 所以 $PA-A=AA^-A-A$, 即 $(P-I)A=(AA^- -I)A$, 所以$P-I=U(I-AA^-)$。

定理 2 P 对于$\prod$是局部幂等的当且仅当 $P^2-P=U(I-AA^-)$,其中 U 是 $m\times n$ 矩阵。

证明 充分性 若 $P^2-P=U(I-AA^-)$,则 $(P^2-P)A=U(I-AA^-)A=0$,即 $P^2A-PA=0$,所以 $p^2A=PA$。

必要性 若 $P^2A=PA$,则 $P^2A-A=(I-AA^-)-A$,即 $P^2A-PA=A-AA^-A$,所以,存在 U,使得 $P^2-P=U(I-AA^-)$。

给出局部恒等算子与局部幂等之间的关系。

定理 3 P 对于$\prod$是局部恒等的,则 Q 对于$\prod$是局部恒等且$\prod$ 是 Q 的不变子空间的充要条件是 P-Q 是局部幂等的且$\prod$是 P-Q 的不变子空间。

证明 因为 $PA=A$,则$\prod$是 P 的不变子空间,因此$\prod$是 P-Q 的不变子空间的充要条件是$\prod$是 Q 的不变子空间。根据局部幂等的性质,若 $PA=A$ 且$\prod$是 Q 的不变子空间,则 P 对于 $Q\prod$也是恒等的,即

$$PQA=QA \tag{3}$$

又

$$PA=A,且\ Q^2A=QA \tag{4}$$

由式(3),式(4)可得$(P-Q)^2A=(P-Q)A$,即

2010 年 4 月 7 日收到 陕西省教育厅基金项目(09JK380)
四川省教育厅基金项目(08ZA132)资助

作者简介:杨凯凡(1979—),女,汉族,陕西乾县人,硕士,讲师,研究方向:算子理论。E-mail:ykf622@ yahoo. com. cn。

$P-Q$是局部幂等的且$\prod$是 $P-Q$ 的不变子空间。反之,由 $PQA=QA$,$PA=A$,$(P-Q)^2A=(P-Q)A$ 也可以推出 Q 是不恒等的。

定理 4 若 P 对于$\prod$是局部幂等的,x 是 PA 的非零特征值 λ 对应的特征向量,则 x 是 P 的特征值 1 所对应的特征向量。

证明 因为 x 是 PA 的非零特征值 λ 对应的特征向量,即 $PAx=\lambda x$[3],乘以 P 可得 $P^2Ax=\lambda Px$。又因为 $P^2A=PA$,所以 $PAx=\lambda Px$,因此 $\lambda x=\lambda Px$,而 $\lambda>0$,所以 $Px=x$,即 x 是 P 的特征值 1 所对应的特征向量。

定理 5 若 P 对于$\prod$是局部幂等的当且仅当 P 沿着子空间$(I-P)\prod$在子空间 $P\prod$ 上是一个斜投影。

证明 因为式(2)可写成 $P(PA)=PA$,即 $P(I-P)A=0$。由因为子空间$(I-P)\prod$和 $P\prod$是不相交的,所以 P 沿着子空间$(I-P)\prod$在子空间 $P\prod$上是一个斜投影. 反之,若 P 沿着子空间$(I-P)\prod$在子空间 $P\prod$上是一个斜投影,则 $P(I-P)A=0$,即 $P^2A=PA$,所以 P 对于$\prod$ 是局部幂等的。

注:既然式(1)可以推出式(2),每个局部恒等的矩阵 P 当然是子空间$\prod$上是一个斜投影,而在定理 5 中指出的子空间$(I-P)\prod$局此时为零空间。对于对称矩阵的局部幂等和局部恒等性,文献[4]做了一定的研究。

参 考 文 献

1 Rao C R, Rao M B. Matrix algebra and its applications to statistics and econometrics. Singapore: World Scientific, 1998;247

2 Baksalary J K, Kala R, Relationships between some representations of the best linear unbiased estimator in the general Gaus-Mark off model. SIAM J Appl Math, 1978;19:682—688

3 陈景良,陈向辉. 特殊矩阵,北京:清华大学出版社,2003

4 Baksalary J K, Kala R. Symmetrizers of matrices. Linear Algebra Appl, 1981;35:51—62

Properties of Two Local Operators

YANG Kai-fan

(Department of Mathematics , Shanxi University of Technology, Hanzhong 723001 P. R. China)

[**Abstract**] For a given matrix A, a matrix P such that $PA=A$ is said to be a local identity, and such that $P^2A=PA$ is said to be a local idempotent. Some properties of such operators are presented: P is local identity if and only *if* $P-I=U(I-AA^-)$, P is local idempotent if and only if $P^2-P=U(I-AA^-)$. Moreover, their relation is also demonstrated: local identity clearly is local idempotent.

[**Key words**] local identity local idempotent oblique projector