

Carleson 测度与加权 Bergman 空间上的 Carleson 测度

张斌武,李朝晖,余维虹

(河海大学常州校区数理部,江苏 常州 213022)

摘要 利用 α 阶 Carleson 测度的定义研究了两种 Carleson 测度的联系,得到了定理 1 以及用 L_a^p 函数的积分不等式来刻画 α 阶 Carleson 测度的推论.利用加权 Bergman 空间上 Carleson 测度的定义以及算子理论方面的有关定义、定理,用定理 2 刻画了 α 阶 Carleson 测度与加权 Bergman 空间的 Carleson 测度之间的关系.

关键词 Carleson 测度 加权 Bergman 空间 L_a^p 函数

中图分类号 O29 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2002)04-0018-04

1 准备知识

Carleson 测度在研究有界解析函数、 H^p 空间及 Bergman 空间中起到很重要的作用.本文应用的一些定义,如 L_a^p 空间、Bergman 空间等定义参见文献[1,2],文中的 α 阶 Carleson 测度的定义及其它一些相关概念见文献[3].

加权 Bergman 空间的定义及加权 Bergman 空间上 Carleson 测度的定义如下:

定义 1 对任意的 $\alpha > -1$,设 $dA_\alpha(z)$ 是单位圆盘 D 上的测度,称

$$dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$$

为 D 上的加权 Bergman 空间上的测度,而称 $L_a^p(dA_\alpha)$ 为加权 Bergman 空间.这里 $dA(z)$ 表示通常意义下的面积测度.

定义 2 设 μ 是加权 Bergman 空间 $L_a^p(dA_\alpha)$ 上的测度,如果

$$\int_D |f(z)|^p d\mu(z) \leq C \int_D |f(z)|^p dA_\alpha(z)$$

则称 μ 是加权 Bergman 空间 $L_a^p(dA_\alpha)$ 上的 Carleson 测度.

2 有关引理

引理 1^[2] 存在正数 N 满足 对于任意正数 $r \leq 1$,存在序列 $\{\lambda_n\} \subset D$,满足以下条件:

- $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\lambda_n, r)$;
- $D(\lambda_n, \frac{r}{4}) \cap D(\lambda_m, \frac{r}{4}) = \emptyset, m \neq n$;
- 单位圆盘 D 中的任意点至多属于 N 个 $D(\lambda_n, 2r)$.

引理 2^[4] 设 f 是单位圆盘 D 内的解析函数, $0 < r \leq 1, p > 0, z \in D, n$ 为非负整数,则存在常数 $C_{p,n,r}$,使得

$$|f^{(n)}(z)|^p \leq \frac{C_{p,n,r}}{|D(z,r)|^{1+\frac{np}{2}}} \int_{D(z,r)} |f(w)|^p dA(w)$$

其中 $f^{(0)}$ 表示 $f(z)$ 本身.

引理 3^[2] 设 $z \in D(a, r)$, 则

$$(1 - |z|^2)^2 \sim |D(a, r)| \sim |D(z, r)| \sim |1 - \bar{a}z|^2$$

这里 $X \sim Y$ 是指存在常数 C 和 C' , 使得

$$C'Y \leq X \leq CY$$

引理 4^[1] 设 μ 是单位圆盘 D 上的有限正 Borel 测度, 则 μ 是 D 上的一阶 Carleson 测度的充要条件为: 对任意的 $p, 0 < p < +\infty$, 存在常数 $C > 0$, 使得对一切 $f \in L_a^p$ 有

$$\left\{ \int_D |f(z)|^p d\mu(z) \right\}^{1/p} \leq C \|f\|_p$$

引理 5^[2] 对任意的 $z \in D$ 有

$$\int_D \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \bar{z}w|^4} dA(z) = 1$$

3 主要结果

定理 1 设 μ 是单位圆盘 D 上的有限正 Borel 测度, $dv(z) = (1 - |z|^2)^{2(1-\alpha)} d\mu(z)$.

a. 若 μ 是 $\alpha (> 0)$ 阶 Carleson 测度, 则 dv 是一阶 Carleson 测度.

b. 若 dv 是一阶 Carleson 测度, 且 $\alpha \geq 1$, 则 μ 是 α 阶 Carleson 测度.

证明 先证(i). 若 μ 是 α 阶 Carleson 测度, 任意 $r > 0$, 有

$$M_r = \sup \left\{ \frac{\mu(D(a, r))}{|D(a, r)|^\alpha}, z \in D \right\} < +\infty$$

则

$$\frac{v(D(a, r))}{|D(a, r)|} = \frac{\int_{D(a, r)} dv(z)}{|D(a, r)|} = \frac{\int_{D(a, r)} (1 - |z|^2)^{2(1-\alpha)} d\mu(z)}{|D(a, r)|}$$

再由引理 3 可得

$$\frac{v(D(a, r))}{|D(a, r)|} \leq \frac{C |D(a, r)|^{1-\alpha}}{|D(a, r)|} \mu(D(a, r)) = \frac{\mu(D(a, r))}{|D(a, r)|^\alpha} < M_r < +\infty$$

设 $r > 0$, 选择满足引理 1 的 λ_n 和 N , 并可选择 D 内互不相交的可测集序列 D_n 满足: (a) $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$; (b) $D_n \subset D(\lambda_n, 2r)$. 则

$$\begin{aligned} v(D) &= v\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} v(D_n) \leq \\ &\sum_{n=1}^{\infty} v(D(\lambda_n, 2r)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_{2r} |D(\lambda_n, 2r)| = \\ &M_{2r} \sum_{n=1}^{\infty} |D(\lambda_n, 2r)| \leq M_{2r} N |D| = \\ &M_{2r} N < +\infty \end{aligned}$$

上面证明中的第 3 个不等式用到了引理 1 中的条件 c, 所以 dv 是有限正 Borel 测度且 dv 是一阶 Carleson 测度.

再证(ii). 因为 $dv(z)$ 是一阶 Carleson 测度, 当 $\alpha \geq 1$ 时有

$$\begin{aligned} \frac{\mu(D(a, r))}{|D(a, r)|^\alpha} &= \frac{\int_{D(a, r)} d\mu(z)}{|D(a, r)|^\alpha} = \\ &\frac{\int_{D(a, r)} (1 - |z|^2)^{2(\alpha-1)} dv(z)}{|D(a, r)|^\alpha} \leq \\ &\frac{C |D(a, r)|^{\alpha-1}}{|D(a, r)|^\alpha} \cdot v(D(a, r)) = \end{aligned}$$

$$\frac{C\nu(D(a,r))}{|D(a,r)|} < M$$

所以 $d\mu$ 是 α 阶 Carleson 测度.

由定理 1 及引理 4 可得如下推论.

推论 若 μ 是 D 上的有限正 Borel 测度, $\alpha \geq 1$, 则 μ 是 α 阶 Carleson 测度的充分必要条件是 对于任意 $p > 0$, 存在常数 $C > 0$, 对一切 $f \in L_a^p$ 有

$$\int_D |f(z)|^p (1 - |z|^2)^{2(1-\alpha)} d\mu(z) \leq C \int_D |f(z)|^p dA(z)$$

定理 2 μ 是 Bergman 空间上的 α 阶 ($\alpha > \frac{1}{2}$) Carleson 测度的充分必要条件是 μ 是加权 Bergman 空间 $L_a^p(dA_{2\alpha-2})$ 上的 Carleson 测度.

证明 先证必要性. 任取 $f \in L_a^p(dA_{2\alpha-2})$, 因为 μ 是 Bergman 空间上的 α 阶 Carleson 测度, 则对任意 $0 < r < 1, \lambda_n \in D$, 存在常数 $M > 0$, 有

$$\frac{\mu(D(\lambda_n, r))}{|D(\lambda_n, r)|^\alpha} < M$$

取 $\{\lambda_n\}$ 和 N 满足引理 1, 从而

$$\begin{aligned} \int_D |f(z)|^p d\mu(z) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{D(\lambda_n, r)} |f(z)|^p d\mu(z) \leq \\ &\sum_{n=1}^{+\infty} C_r \mu(D(\lambda_n, r)) \cdot \sup_{z \in D(\lambda_n, r)} |f(z)|^p \leq \\ &\sum_{n=1}^{+\infty} C_r \frac{C_r' \mu(D(\lambda_n, r))}{|D(\lambda_n, r)|^\alpha} \int_{D(\lambda_n, 2r)} |f(z)|^p dA(z) \leq \\ &\sum_{n=1}^{+\infty} C_r' |D(\lambda_n, r)|^{\alpha-1} \int_{D(\lambda_n, 2r)} |f(z)|^p dA(z) \leq \\ &\sum_{n=1}^{+\infty} C_r'' \int_{D(\lambda_n, 2r)} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^{2\alpha-2} dA(z) \leq \\ &C_r'' N \int_D |f(z)|^p dA_{2\alpha-2}(z) \end{aligned}$$

上面证明中的第 3 个不等式用到了引理 2 (令 $n=0$) 及引理 3, 第 5 个不等式用到了引理 3, 第 6 个不等式用到了引理 1 中的第 c 个条件, 从而 μ 是加权 Bergman 空间 $L_a^p(dA_{2\alpha-2})$ 上的 Carleson 测度.

充分性 设 μ 是加权 Bergman 空间 $L_a^p(dA_{2\alpha-2})$ 上的 Carleson 测度. 对任意固定的 $a \in D$, 令

$$f(z) = \left(\frac{(1 - |a|^2)^2}{(1 - \overline{a}z)^{4+\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

则有

$$\begin{aligned} \int_D |f(z)|^p dA_\alpha(z) &= \int_D \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \overline{a}z|^4} \cdot \frac{1}{|1 - \overline{a}z|^\alpha} dA_\alpha(z) \leq \\ &\int_D \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \overline{a}z|^4} \cdot \frac{1}{(1 - |z|^2)^\alpha} dA_\alpha(z) \leq \\ &2^\alpha \int_D \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \overline{a}z|^4} \cdot \frac{1}{(1 - |z|^2)^\alpha} dA_\alpha(z) = \\ &2^\alpha (\alpha + 1) \end{aligned}$$

上面最后 1 个等式用到了引理 5, 故 $f(z) \in L_a^p(dA_\alpha)$. 另一方面, 取 $a \in D, r > 0$, 则

$$\begin{aligned} \int_D |f(z)|^p d\mu(z) &\geq \int_{D(a,r)} \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \overline{a}z|^{4+\alpha}} d\mu(z) \geq \\ &C \int_{D(a,r)} \frac{(1 - |a|^2)^2}{(1 - |a|)^{4+\alpha}} d\mu(z) \geq \end{aligned}$$

$$\frac{C'}{(1-|a|^2)^{2+\alpha}}\mu(D(a,r))\geqslant C''\frac{\mu(D(a,r))}{|D(a,r)|^{1+\frac{\alpha}{2}}}$$

上面第 2 个不等式用到了引理 3,从而

$$\frac{\mu(D(a,r))}{|D(a,r)|^{1+\frac{\alpha}{2}}}<C$$

即 μ 是 $1+\frac{\alpha}{2}$ 阶的 Bergman 空间上的 Carleson 测度.

用 $2\alpha-2$ 替换上面的 α ,使得充分性的证明.

4 结 论

本文给出并证明了 α 阶 Carleson 测度与加权 Bergman 空间的 Carleson 测度之间关系的定理,为研究加权 Bergman 空间的 Carleson 测度提供了一种方法.当然,对加权 Bergman 空间的 Carleson 测度还有待做更深入的研究.

参考文献：

[1] Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions[J]. Annals of Math,1958(80) 920 ~ 930.

[2] Zhu K H. Operator theory in function spaces[M]. New York :Dekker,1990. 46 ~ 50,56 ~ 61.

[3] 张斌武. 有关 Carleson 测度的等价刻画[J]. 河海大学学报(自然科学版),2001,29(2) :11 ~ 14.

[4] Lueking D H. Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives [J]. Amer J Math, 1985(107) 85 ~ 111.

Carleson measure and Carleson measure in weighted Bergman space

ZHANG Bin-wu, LI Zhao-hui, YU Wei-hong

(Department of Mathematics and Physics , Hohai Univ . Changzhou Branch , Changzhou 213002, China)

Abstract: The relationship between two Carleson measures is studied by use of the definition of α -order Carleson measure. Theorem 1 is obtained, and a corollary is deduced : the α -order Carleson measure can be described by an integral inequality of L^p_α function. In addition, theorem 2 is used to describe the relationship between the α -order Carleson measure and the Carleson measure in weighted Bergman space based on the definition of Carleson measure in the Bergman space and some related definitions and principles of the operator theory.

Key words: Carleson measure ; weighted Bergman space ; L^p_α function