文章编号：1674-8085(2017)06-0006-07

模糊软集运算的分析与研究

华逢彬，*王艳平

（辽宁工业大学理学院，辽宁，锦州 121001）

摘　要：首先对模糊软集的交、并、补运算进行了补充和修正，然后针对模糊软集参数集不相同的情况进行分析，给出模糊软集的两种不同理解方式，并提出了弱模糊软集和强模糊软集的概念。在这两种解释下采用相同的方法来构造交、并、补算子，并定义新的包含关系，使得在这两种解释下通过交、并运算能够实现信息粒子的泛化与细化。同时给出新的解释下交、并、补运算的性质，证明这两种解释下的交、并、补运算都满足 De Morgan 律。

关键词：模糊软集；交集；并集；补集；模糊软子集

中图分类号：O236　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2017.06.002

ANALYSIS AND RESEARCH ON OPERATION OF FUZZY SOFT SET

HUA Feng-bin, *WANG Yan-ping

(Science College, Liaoning University of Technology, Jinzhou, Liaoning 121001, China)

Abstract: The union intersection and complement operators of fuzzy soft sets are replenished and corrected. The fuzzy soft sets with different parameter sets are analyzed. Two different understanding ways are given. Furthermore, the concept of weak fuzzy soft sets and strong fuzzy soft sets are proposed. Under these two explanations, the operators of union intersection and complement are constructed by using the same method. The new inclusion relation is defined in two types of fuzzy soft sets, which makes the generalization and refinement of information granule can be achieved by the operations of union and intersection. Meanwhile, the properties of operations of union, intersection and complement are discussed to show that these operations in two types of soft sets all satisfy the De-Morgan's law.

Key words: fuzzy soft sets ; intersection; union; complement; fuzzy soft subset

为了适应现代社会的飞速发展和科技的迅猛进步，在许多领域中经常需要处理大量的不精确、非完备、模糊的数据信息。为了能够更好地处理这些复杂的信息，专家学者们先后提出了相应的理论来解决这些不确定性问题。1965 年 Zadeh 教授提出了模糊集理论[1]，1982 年 Pawlak 教授提出了粗糙集理论[2]。他们在处理实际决策问题时有着各自的优势，但也表现出不足，因此在 1999 年 Molodtsov 首次提出了软集理论[3-4]。文献[3]中主要介绍了软集的概念和应用，Maji[5]等给出了两个软集的包含及等价关系，以及空软集和绝对软集的概念，并定义了交、并、补运算。随着软集理论的快速发展，学者们把其他理论融合到软集理论中，从而产生了许多新的理论。Maji[6]首先提出了模糊软集的概念，定义了全模糊软集、零模糊软集、模糊软子集等概念。他同时在文献[6]中定义了模糊软集的并、交、补运算。Ahmad[7]等人指出了文献[6]中定义的模糊软集的交运算存在问题，并定义了新的交运算，进一步讨论了模糊软集的运算性质和运算律。Atanassov[8]提出了直觉模糊集的概念，用隶属度和

收稿日期：2017-05-26；修改日期：2017-06-17
作者简介：华逢彬(1990-)，男，山东临沂人，硕士生，主要从事模糊集，粗糙集研究(E-mail:928596009@qq.com);
*王艳平(1965-)，女，辽宁锦州人，教授，硕士，主要从事模糊集，粗糙集研究(E-mail: lxywyp@lnut.edu.cn).

非隶属度对决策中的模糊不确定性进行描述。Yang[9]等结合区间值模糊集和软集，提出了区间值模糊软集的概念。Xu 等讨论了 Vague 集与软集的综合模型，给出了 Vague 软集[10]。目前，软集及其扩展模型仍是一个热门的研究方向。例如，Ganeshsree[11]等进一步讨论了复合 Vague 软集之间的关系；Sankar[12]等研究了粗糙软集及其在格中的应用；Feng[13]等讨论了基于关联规则挖掘的软集，付清[14]研究了模糊软集及其在决策中的应用；秦克云[15]给出了软集研究与展望。

作为模糊软集研究的基础，必须指出的是首先文献[6-7]中提出的模糊软集交、并、补运算只是单纯地从集合的角度来讨论模糊软集的运算，对于算子的具体含义、成立条件以及运算目的尚未明确。其次，文献[6]中的补运算也存在问题，文献[7]并没有改进，而是按照错误的算子进行了讨论。而后面提出的一系列推广的模糊软集的运算都是采用的这种运算形式，因此本文对模糊软集的补算子作了改进，并给出了一对新的并、交算子，它们对应于经典软集中的严格并与扩展交。事实上，当参数集不同时，从不同的角度而言其模糊值是不同的，因此本文提出弱模糊软集和强模糊软集两个概念，使这两种情况分别对应两对不同的交、并算子，并重新定义模糊软集间的包含关系，保证了在两种模糊软集中都能通过交、并运算实现信息的细化与泛化，并验证 De Morgan 律都成立。

1 预备知识

首先来回顾一下一些相关的知识。

定义 1.1[6] 设U为初始论域，E为非空参数集，设$F(U)$为U上的所有模糊集的全体，$A\subseteq E$，称(F,A)为U上的模糊软集，其中F为映射，$F:A\to F(U)$。

定义 1.2[6] 设(F,A)和(G,B)为同一论域U上的模糊软集，若（1）$A\subseteq B$，（2）$\forall e\in A$，$F(e)$为$G(e)$的模糊子集，则称(F,A)是(G,B)的模糊软子集，记为$(F,A)\subseteq(G,B)$。

定义 1.3[6] 设(F,A)和(G,B)为同一论域U上的两个模糊软集，若$(F,A)\subseteq(G,B)$且$(G,B)\subseteq(F,A)$，则称(F,A)和(G,B)为模糊软相等，记为$(F,A)=(G,B)$。

定义 1.4[6] 对于模糊软集(F,A)，若$\forall e\in A$，$F(e)=\varnothing$，则称(F,A)为U上的空模糊软集，记作$\varnothing$；若$\forall e\in A$，$F(e)=U$，则称(F,A)为U上的绝对模糊软集，记作U。

定义 1.5[6] 同一论域U上的两个模糊软集(F,A)和(G,B)的并为模糊软集(H,C)，记作$(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$，这里$C=A\cup B$，$\forall e\in C$，

$$H(e)=\begin{cases}F(e), & e\in A-B\\ G(e), & e\in B-A\\ F(e)\cup G(e), & e\in A\cap B\end{cases},$$

定义 1.6[7] 论域U上的两个模糊软集(F,A)和(G,B)的交为U上的模糊软集(H,C)，其中$C=A\cap B$，对$\forall e\in C$，$H(e)=F(e)\cap G(e)$记为$(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,C)$。

在一些推广的模糊软集中，也有下面形式的并、交运算出现，它们是经典软集中严格并和扩展交在模糊软集中的一个自然推广。

定义 1.7 设(F,A)和(G,B)是同一论域上的两个模糊软集，$A\cap B\neq\varnothing$，(F,A)和(G,B)的并被定义为一个模糊软集(H,C)，其中$C=A\cap B$，对于$\forall e\in C$，$H(e)=F(e)\cup G(e)$，记为$(F,A)\cup_R(G,B)=(H,C)$。

定义 1.8 设(F,A)和(G,B)是同一论域U上的两个软集，(F,A)和(G,B)的交被定义为一个U上的模糊软集(H,C)，其中$C=A\cup B$，对$\forall e\in C$，

$$H(e)=\begin{cases}F(e), & e\in A-B\\ G(e), & e\in B-A\\ F(e)\cap G(e), & e\in A\cap B\end{cases},$$

记为$(F,A)\cap_R(G,B)=(H,C)$。

为了方便理解，下面先看一个例子。

例 1.1 设全集 $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ 表示六处房子集合。参数集 E ={贵的、漂亮的、木质的、便宜的、绿色环保的}，表示为

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$。模糊软集$(F，B)$和$(G，B)$分别表示甲先生和甲太太买该所房子的“吸引力”。假设

$$F(e_1)=\left\{\frac{0.5}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{0.4}{h_3}\frac{1}{h_4}\frac{0.3}{h_5}\frac{0}{h_6}\right\}$$

$$F(e_3)=\left\{\frac{0.2}{h_1}\frac{0.3}{h_2}\frac{1}{h_3}\frac{1}{h_4}\frac{1}{h_5}\frac{0}{h_6}\right\}$$

$$F(e_4)=\left\{\frac{1}{h_1}\frac{0.2}{h_2}\frac{0.3}{h_3}\frac{1}{h_4}\frac{0.7}{h_5}\frac{0.8}{h_6}\right\}$$

$$F(e_5)=\left\{\frac{0}{h_1}\frac{0.2}{h_2}\frac{1}{h_3}\frac{1}{h_4}\frac{0.5}{h_5}\frac{0.4}{h_6}\right\}$$

$$G(e_2)=\left\{\frac{0.4}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{1}{h_3}\frac{0.5}{h_4}\frac{0.3}{h_5}\frac{0.2}{h_6}\right\}$$

$$G(e_3)=\left\{\frac{0.3}{h_1}\frac{0.3}{h_2}\frac{0.4}{h_3}\frac{0.2}{h_4}\frac{0}{h_5}\frac{0.2}{h_6}\right\}$$

$$G(e_4)=\left\{\frac{0}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{0.3}{h_3}\frac{0.7}{h_4}\frac{0.6}{h_5}\frac{0.9}{h_6}\right\}$$

那么就可以得到对于买该所房子的“吸引力”所对应的模糊软集

$(F,A)=\{F(e_1),F(e_3),F(e_4),F(e_5)\}$，

$(G,B)=\{G(e_2),G(e_3),G(e_4)\}$。

由定义 1.5 和定义 1.6 可得：

$(F,A)\tilde{\bigcap}(G,B)=\{H(e_3),H(e_4)\}=$
$\{F(e_3)\bigcap G(e_3),F(e_4)\bigcap G(e_4)\}=$
$\{\{0.2,0.3,0.4,0.2,0,0\},\{0,0.2,0.3,0.7,0.6,0.8\}\}$.

$(F,A)\tilde{\bigcup}(G,B)=$
$\{H(e_1),H(e_2),H(e_3),H(e_4),H(e_5)\}=$
$\{F(e_1),G(e_2),F(e_3)\bigcup G(e_3),F(e_4)\bigcup G(e_4),F(e_5)\}=$
$\{\{0.5,1,0.4,1.0.3,0\},\{0.4,1,1,0.5,0.3,0.2\},$
$\{0.3,0.3,1,1,1,0.2\},\{1,1,0.3,1,0.7,0.9\},$
$\{0,0.2,1,1,0.5,0.4\}\}$

2 弱模糊软集及其交与并运算

当用模糊软集(F,A)处理问题时，所考虑的A是参数集E的子集，会发现对于属于E但不属于A的参数e，可以考虑看成是隶属度取 0 的一簇子集，即解释为这种参数对于决策者而言无影响，从这一角度给出弱模糊软集定义。

定义 2.1 设(F,A)是U上的一个模糊软集，其中$A\subseteq E$。$F(U)$表示U上的所有模糊集的集合，令$\breve{F}:E\to F(U)$，且对$\forall e\in E$，当$e\in A$时，有$\breve{F}(e)=F(e)$；当$e\notin A$时，有$\breve{F}(e)=\varnothing$，则称序对$(\breve{F},A)$为U上的一个弱模糊软集。

在例 1.1 中，对应于模糊软集(F,A)和(G,B)的弱模糊软集为：

$(\breve{F},A)=\{F(e_1),\varnothing,F(e_3),F(e_4),F(e_5)\}$，

$(\breve{G},B)=\{\varnothing,G(e_2),G(e_3),G(e_4),\varnothing\}$。

如果约定弱模糊软集中出现的$\varnothing$可省略不写，则弱模糊软集就是定义 1.1 所提的模糊软集。所以，实际上只是在某些情况下将模糊软集理解为一个弱模糊软集的形式，方便理解与运算。

现在将模糊软集看成是弱模糊软集，在此基础上定义新的包含关系如下：

定义 2.2 设$(\breve{F},A)$和$(\breve{G},B)$是论域U上的两个弱模糊软集，若对$\forall e\in E$，模糊集 $\breve{F}(e)$与$\breve{G}(e)$有$\breve{F}(e)\subseteq\breve{G}(e)$，则称$(\breve{F},A)$是$(\breve{G},B)$的弱模糊软子集，也称$(\breve{F},A)$弱模糊软包含于$(\breve{G},B)$或$(\breve{G},B)$弱模糊软包含$(\breve{F},A)$。记作$(\breve{F},A)\tilde{\subset}(\breve{G},B)$或$(\breve{G},B)\tilde{\supset}(\breve{F},A)$。

定义 2.3 设$(\breve{F},A)$和$(\breve{G},B)$是论域U上的两个弱模糊软集，若$(\breve{F},A)\tilde{\subset}(\breve{G},B)$且$(\breve{G},B)\tilde{\subset}(\breve{F},A)$，则称$(\breve{F},A)$与$(\breve{G},B)$弱模糊软相等，记作$(\breve{F},A)=(\breve{G},B)$。

接下来，讨论两个弱模糊软集的并与交运算。

定义 2.4 论域U上的两个弱模糊软集$(\breve{F},A)$和$(\breve{G},B)$的并定义为U上的一个弱模糊软集$(\breve{H},C)$，其中模糊集合$C=A\bigcup B$，对$\forall e\in E$，$\breve{H}(e)=\breve{F}(e)\bigcup\breve{G}(e)$。记为$(\breve{F},A)\bigcup_W(\breve{G},B)=(\breve{H},C)$。

定义 2.5 论域U上的两个弱模糊软集$(\breve{F},A)$和$(\breve{G},B)$的交定义为U上的一个弱模糊软集$(\breve{H},C)$，其中$C=A\bigcap B$。对$\forall e\in E$，$\breve{H}(e)=\breve{F}(e)\bigcap\breve{G}(e)$，记为$(\breve{F},A)\bigcap_W(\breve{G},B)=(\breve{H},C)$。

如果约定弱模糊软集中出现的$\varnothing$可省略，将弱

模糊软集看成相应的模糊软集。那么可以得到下面两个定理：

定理 2.1 定义 2.4 中的并运算与定义 1.5 中的并运算相等。

证明：由定义可知$C=A\cup B$，当任意的$e\in A$而$e\notin B$时，由定义 2.5 有$H(e)=F(e)$。因为此时，$\breve{F}(e)=F(e)$，$\breve{G}(e)=\varnothing$，所以对弱模糊软集$(\breve{H},C)$有$\breve{H}(e)=\breve{F}(e)\cup\breve{G}(e)=F(e)$。

当任意的$e\notin A$而$e\in B$时，有$H(e)=G(e)$。此时，$\breve{F}(e)=\varnothing$，$\breve{G}(e)=G(e)$，对弱模糊软集$(\breve{H},C)$有$\breve{H}(e)=\breve{F}(e)\cup\breve{G}(e)=G(e)$。

当任意的$e\in A\cap B$时，有$H(e)=F(e)\cap G(e)$。此时，$\breve{F}(e)=F(e)$，$\breve{G}(e)=G(e)$，对弱模糊软集$(\breve{H},C)$有$\breve{H}(e)=\breve{F}(e)\cap\breve{G}(e)=F(e)\cap G(e)$。

当$e\notin C$时，$\breve{F}(e)=\varnothing$，$\breve{G}(e)=\varnothing$，对弱模糊软集$(\breve{H},C)$有$\breve{H}(e)=\varnothing$。综上所述可得定理 2.1 成立。

同理可证定理 3.2 成立。

定理 2.2 定义 3.5 中的交运算与定义 2.6 中的交运算相等。

定理 2.3 设$(\breve{F},A)$、$(\breve{G},B)$和$(\breve{H},C)$是论域U上的三个弱模糊软集，则

(1) $(\breve{F},A)\cup_W(\breve{F},A)=(\breve{F},A)$，
$(\breve{F},A)\cap_W(\breve{F},A)=(\breve{F},A)$.

(2) $(\breve{F},A)\cup_W\varnothing=(\breve{F},A)$，$(\breve{F},A)\cap_W\varnothing=\varnothing$.

(3) $(\breve{F},A)\cup_W U=U$，$(\breve{F},A)\cap_W U=(\breve{F},A)$.

(4) $(\breve{F},A)\cup_W(\breve{G},B)=(\breve{G},B)\cup_W(\breve{F},A)$，
$(\breve{F},A)\cap_W(\breve{G},B)=(\breve{G},B)\cap_W(\breve{F},A)$.

(5) $(\breve{F},A)\cup_W((\breve{G},B)\cup_W(\breve{H},C))=$
$((\breve{F},A)\cup_W(\breve{G},B))\cup_W(\breve{H},C)$。

(6) $(\breve{F},A)\cap_W((\breve{G},B)\cap_W(\breve{H},C))=$
$((\breve{F},A)\cap_W(\breve{G},B))\cap_W(\breve{H},C)$.

(7) $(\breve{F},A)\cup_W((\breve{G},B)\cap_W(\breve{H},C))=$
$((\breve{F},A)\cup_W(\breve{G},B))\cap_W((\breve{F},A)\cup_W(\breve{H},C))$.

(8) $(\breve{F},A)\cap_W((\breve{G},B)\cup_W(\breve{H},C))=$
$((\breve{F},A)\cap_W(\breve{G},B))\cup_W((\breve{F},A)\cap_W(\breve{H},C))$.

以上性质显然成立，不一一给予证明。

例 2.1 对例 1.1 中的弱模糊软集$(\breve{F},A)$、$(\breve{G},B)$，按照定义 2.4 与定义 2.5 中的并和交运，则有：

$(\breve{F},A)\cup_W(\breve{G},B)=$
$\{H(e_1),H(e_2),H(e_3),H(e_4),H(e_5)\}=$
$\{(F(e_1)\cup\varnothing),(\varnothing\cup G(e_2)),(F(e_3)\cup G(e_3)),$
$(F(e_4)\cup G(e_4)),(F(e_5)\cup\varnothing)\}=$
$\{\{0.5,1,0.4,1,0.3,0\},\{0.4,1,1,0.5,0.3,0.2\},$
$\{0.3,0.3,1,1,1,0.2\},\{1,1,0.3,1,0.7,0.9\},$
$\{0,0.2,1,1,0.5,0.4\}\}$.

$(\breve{F},A)\cap_W(\breve{G},B)=$
$\{H(e_1),H(e_2),H(e_3),H(e_4),H(e_5)\}=$
$\{(F(e_1)\cap\varnothing),(\varnothing\cap G(e_2)),(F(e_3)\cap G(e_3)),$
$(F(e_4)\cap G(e_4)),(F(e_5)\cap\varnothing)\}=$
$\{\{0,0,0,0,0,0\},\{0,0,0,0,0,0\},$
$\{0.2,0.3,0.4,0.2,0,0\},\{0,0.2,0.3,0.7,0.6,0.8\},$
$\{0,0,0,0,0,0\}\}$。

由此可以进一步验证两种定义是一致的。再来看包含关系，根据定义 2.2 显然有：

定理 2.4 设$(\breve{F},A)$和$(\breve{G},B)$是论域U上的两个弱模糊软集，则$(\breve{F},A)\tilde{\subset}(\breve{F},A)\cup_W(\breve{G},B)$和$(\breve{G},B)\tilde{\subset}(\breve{F},A)\cup_W(\breve{G},B)$；$(\breve{F},A)\cap_W(\breve{G},B)\tilde{\subset}(\breve{F},A)$和$(\breve{F},A)\cap_W(\breve{G},B)\tilde{\subset}(\breve{G},B)$。

以上性质显然成立，不一一给予证明。

3 强模糊软集及其并与交

在模糊软集(F,A)中，A是参数集E的子集，属于E但不属于A的参数e对于决策可能无影响，但也可能有最大的影响，那么又可以从另一个角度考虑其隶属度是取 1 的一簇子集，从而给出强模糊软集定义。

定义 3.1 设(F,A)是U上的一个模糊软集，其中$A\subseteq E$。$F(U)$表示U上的所有模糊集的集合，令$\hat{F}:E\to F(U)$，且对$\forall e\in E$，当$e\in A$时，有$\hat{F}(e)=F(e)$；当$e\notin A$时，有$\hat{F}(e)=U$，则称序对$(\hat{F},A)$为U上的一个强模糊软集。

定义 3.2 设$(\hat{F},A)$和$(\hat{G},B)$是论域U上的两个强模糊软集，若对$\forall e\in E$，有 $\hat{F}(e)\subseteq\hat{G}(e)$，则称$(\hat{F},A)$是$(\hat{G},B)$的强模糊软子集，也称$(\hat{F},A)$强模糊软包含于$(\hat{G},B)$ 或$(\hat{G},B)$强模糊软包含$(\hat{F},A)$，记作：$(\hat{F},A)\tilde{\subset}(\hat{G},B)$或$(\hat{G},B)\tilde{\supset}(\hat{F},A)$。

定义 3.3 设$(\hat{F},A)$和$(\hat{G},B)$是论域U上的两个强模糊软集，若$(\hat{F},A)\tilde{\subset}(\hat{G},B)$且 $(\hat{G},B)\tilde{\subset}(\hat{F},A)$，则称$(\hat{F},A)$与$(\hat{G},B)$强模糊软相等，记作$(\hat{F},A)=(\hat{G},B)$。

可以看出，在弱模糊软集和强模糊软集中定义的软包含关系也是完全一致的。

接下来，讨论两个强模糊软集的并、交运算。

定义 3.4 设$(\hat{F},A)$和$(\hat{G},B)$是论域U上的两个强模糊软集，$(\hat{F},A)$和$(\hat{G},B)$的并定义为U上的一个强模糊软集$(\hat{H},C)$，其中$C=A\bigcap B\neq\varnothing$，对于$\forall e\in E$，$\hat{H}(e)=\hat{F}(e)\bigcup\hat{G}(e)$。记为：$(\hat{F},A)\bigcup_S(\hat{G},B)=(\hat{H},C)$。

定义 3.5 设$(\hat{F},A)$和$(\hat{G},B)$是论域U上的两个强模糊软集，$(\hat{F},A)$和$(\hat{G},B)$的交定义为U上的一个强模糊软集$(\hat{H},C)$，其中$C=A\bigcup B$，对$\forall e\in E$，$\hat{H}(e)=\hat{F}(e)\bigcap\hat{G}(e)$。记为：$(F,A)\bigcap_S(G,B)=(H,C)$。

如果将强模糊软集中的U省略，那么强模糊软集就可以看成相应的模糊软集，那么可以得到下面两个定理：

定理 3.1 定义 3.4 中的并运算与定义 1.7 中的并运算相等。

定理 3.2 定义 3.5 中的交运算与定义 1.8 中的交运算相等。

注：定理 3.1 与定理 3.2 的证明同定理 2.1 的证明，这里不再赘述。

例 3.1 对于例 1.1 中的模糊软集(F,A)、(G,B)，根据定义 3.1 可知其强模糊软集为：

$(\hat{F},A)=\{F(e_1),U,F(e_3),F(e_4),F(e_5)\}$，

$(\hat{G},B)=\{U,G(e_2),G(e_3),G(e_4),U\}$。

按照定义 1.7 和定义 1.8 对两个模糊软集进行并和交运算有：

$(F,A)\bigcup_R(G,B)=\{H(e_3),H(e_4)\}=$

$\{F(e_3)\bigcup G(e_3),F(e_4)\bigcup G(e_4)\}=$

$\{\{0.3,0.3,1,1,1.0.2\},\{1,1,0.3,1,0.7,0.9\}\}$.

$(F,A)\bigcap_R(G,B)=$

$\{H(e_1),H(e_2),H(e_3),H(e_4),H(e_5)\}=$

$\{F(e_1),G(e_2),F(e_3)\bigcap G(e_3),F(e_4)\bigcap G(e_4),F(e_5)\}=$

$\{\{0.5,1,0.4,1,0.3,0\},\{0.4,1,1,0.5,0.3,0.2\},$

$\{0.2,0.3,0.4,0.2,0,0\},\{0,0.2,0.3,0.7,0.6,0.8\},$

$\{0,0.2,1,1,0.5,0.4\}\}$.

按照定义 3.6 和定义 3.7 对两个强模糊软集进行并和交运算有：

$(\hat{F},A)\bigcup_s(\hat{G},B)=\{H(e_3),H(e_4)\}=$

$\{\{F(e_3)\bigcup G(e_3),F(e_4)\bigcup G(e_4)\}=$

$\{\{0.3,0.3,1,1,1.0.2\},\{1,1,0.3,1,0.7,0.9\}\}\}$.

$(\hat{F},A)\bigcap_s(\hat{G},B)=$

$\{H(e_1),H(e_2),H(e_3),H(e_4),H(e_5)\}=$

$\{F(e_1)\bigcap U,U\bigcap G(e_2),F(e_3)\bigcap G(e_3),$

$F(e_4)\bigcap G(e_4),F(e_5)\bigcap U\}=$

$\{\{0.5,1,0.4,1,0.3,0\},\{0.4,1,1,0.5,0.3,0.2\},$

$\{0.2,0.3,0.4,0.2,0,0\},\{0,0.2,0.3,0.7,0.6,0.8\},$

$\{0,0.2,1,1,0.5,0.4\}\}$。

当把模糊软集理解为强模糊软集时，定义 3.4 和定义 3.5 中的并和交算子与定义 3.6 和定义 3.7 中定义的并和交算子是一致的。接下来考虑包含关系，根据定义 3.2 可知：

定理 3.3 设$(\hat{F},A)$和$(\hat{G},B)$是论域U上的两个强模糊软集，则

$(\hat{F},A)\tilde{\subset}(\hat{F},A)\bigcup_S(\hat{G},B)$和$(\hat{G},B)\tilde{\subset}(\hat{F},A)\bigcup_S(\hat{G},B)$；

$(\hat{F},A)\bigcap_S(\hat{G},B)\tilde{\subset}(\hat{F},A)$和$(\hat{F},A)\bigcap_S(\hat{G},B)\tilde{\subset}(\hat{G},B)$。

上面性质显然成立。

4 弱模糊软集和强模糊软集的补集

首先回顾一下在文献[6]中关于模糊软集补的定义。

定义 4.1[6] 设(F,A)是U上的一个模糊软集，称$(F,A)^c$是(F,A)的模糊软集的补集，记作$(F,A)^c=(F^c,\neg A)$，其中$F^c:\neg A\to F(U)$，对于

$\forall e \in A$， $F^c(e) = (F(\neg e))^c$。

本文提出另一种模糊软集补的定义。

定义 4.2 设(F, A)是U上的一个模糊软集，称$(F, A)^c$是(F,A)的模糊软集的补集，记作$(F, A)^c = (F^c, A)$，其中$F^c : A \to F(U)$，对于$\forall e \in A$，$F^c(e) = U - F(e)$。

将上述定义推广到弱模糊软集和强模糊软集上，便可以得到弱模糊软集和强模糊软集的补集。以弱模糊软集为例给出定义。

定义 4.3 U上的一个弱模糊软集$(\breve{F}, A)$的补定义为$(\breve{F}, A)^c = (\breve{F}^c, A)$，其中$\breve{F}^c : A \to F(U)$，对于$\forall e \in A$，$\breve{F}^c(e) = U - \breve{F}(e)$。

按照弱模糊软集和强模糊软集的补集的定义，可验证弱模糊软集或强模糊软集中De Morgan律都成立，给出下面的定理及其证明。

定理 4.1 设$(\breve{F}, A)$和$(\breve{G}, B)$是论域U上的两个弱模糊软集，则有

(1) $((\breve{F}, A) \bigcup_W (\breve{G}, B))^c = (\breve{F}, A)^c \bigcap_W (\breve{G}, B)^c$ ；

(2) $((\breve{F}, A) \bigcap_W (\breve{G}, B))^c = (\breve{F}, A)^c \bigcup_W (\breve{G}, B)^c$.

证明 (1)设$(\breve{F}, A) \bigcup_W (\breve{G}, B) = (\breve{H}_1, A \bigcup B)$，则对$\forall e \in E$，有$\breve{H}_1(e) = \breve{F}(e) \bigcup \breve{G}(e)$。

由定义2.1可知，当$e \in A$时，$\breve{F}(e) = F(e)$；当$e \notin A$时，$\breve{F}(e) = \varnothing$。同理，当$e \in B$时，$\breve{G}(e) = G(e)$；当$e \notin B$时，$\breve{G}(e) = \varnothing$，所以对$\forall e \in E$有：

$$\breve{H}_1(e) = \begin{cases} \breve{F}(e) = F(e), & \mathrm{e} \in \mathrm{A} - B \\ \breve{G}(e) = G(e), & e \in B - A, \\ \breve{F}(e) \bigcup \breve{G}(e) = F(e) \bigcup G(e), & e \in A \bigcap B. \end{cases}$$

因此可得：

$((\breve{F}, A) \bigcup_W (\breve{G}, B))^c = (\breve{H}_1, A \bigcup B)^c = (\breve{H}_1{}^c, A \bigcup B)$，

由定义4.2可得：对于$\forall e \in E$，

$$\breve{H}_1{}^c(e) = \begin{cases} U - F(e), & e \in A - B \\ U - G(e), & e \in B - A, \\ U - (F(e) \bigcup G(e)), & e \in A \bigcap B \end{cases}$$

$(\breve{F}, A)^c \bigcap_W (\breve{G}, B)^c = (\breve{F}^c, A) \bigcap_W (\breve{G}^c, B) = (\breve{H}_2{}^c, A \bigcap B)$ ，

又因为对于$\forall e \in E$，$\breve{F}^c(e) = U - \breve{F}(e)$，$\breve{G}^c(e) = U - \breve{G}(e)$，当$e \in A$时，有$\breve{F}^c(e) = U - F(e)$；当$e \notin A$时，有$\breve{F}^c(e) = U$。同理可知，当$e \in B$时，有$\breve{F}^c(e) = U - G(e)$；当$e \notin B$时，有$\breve{F}^c(e) = U$。于是对于$\forall e \in E$有：

$$\breve{H}_2{}^c(e) = \begin{cases} U - F(e), & e \in A - B \\ U - G(e), & e \in B - A, \\ (U - F(e)) \bigcap (U - G(e)), & e \in A \bigcap B \end{cases}$$

显然有$\breve{H}_1^c(e) = \breve{H}_2^c(e)$，所以：

$((\breve{F}, A) \bigcup_W (\breve{G}, B))^c = (\breve{F}, A)^c \bigcap_W (\breve{G}, B)^c$。

（2）同理可证。

定理 4.2 设$(\hat{F}, A)$和$(\hat{G}, B)$是论域U上的两个强软集，同样满足德摩根律，有

(1) $((\hat{F}, A) \bigcup_S (\hat{G}, B))^c = (\hat{F}, A)^c \bigcap_S (\hat{G}, B)^c$ ；

(2) $((\hat{F}, A) \bigcap_S (\hat{G}, B))^c = (\hat{F}, A)^c \bigcup_S (\hat{G}, B)^c$。

证明过程与定理4.1相同。

5 总结

本文对模糊软集给出两种不同的解释，分别称为弱模糊软集和强模糊软集。在这两种解释下，将不同参数集的模糊软集的交、并、补运算和包含关系统一到一个框架下,从而解释了模糊软集中不同类型的交、并算子的由来，并将不同类型的交、并算子进行成对的运算，验证了成对出现的并、交、补算子都满足De Morgan律。这样两种解释对参数集不同的模糊软集进行补充，从而使运算成对的出现，这样既方便运算也便于理解，从而为不确定性决策提供了更清晰的理论依据。

参考文献：

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965 (8):338-353.

[2] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer Information Science, 1982（5）:341-356.

[3] Molodtsov D. Soft set theory-First results [J]. Computers and Mathematics with Applications,1999, 37:19-31.

[4] Molodtsov D. The theory of soft set [M]. Moscow : URSS Publishers,2004.

[5] Maji P K, Biswas R, Roy A R. Soft set theory[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2003, 45:555-562.

[6] Maji P K, Biswas R, Roy A R. Fuzzy soft sets [J]. Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9(3):589-602.

[7] Ahmad B, Kharal A. On Fuzzy Soft Sets [J]. Advances in Fuzzy Systems, 2009:1-6.

[8] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J].Fuzzy Sets and Systems ,1986, 20(1) : 87- 96.

[9] Yang X B, Lin T Y, Yang J Y, et al. Combination of interval Valued fuzzy set and soft set [J].Computers & Mathematics with App;ication,2009,58(3):521-527.

[10] Xu W, Ma J, Wang S, et al. Vague soft sets and their properties[J]. Computers and Mathematics with Application,2010,59(2):787-794.

[11] Ganeshsree Selvachandran, Maji P K, et al. Relations between complex vague soft sets [J]. Applied Soft Computing, 2016, 47:438-448.

[12] Sankar Kumar Roy，Susanta Bera. Approximation of rough soft set and its application to lattice [J]. Fuzzy Inf. Eng. ,2015(7):379-387.

[13] Feng Feng, Junghoo Cho,Witold Pedrycz, et al. Soft set based association rule mining [J]. Knowledge-Based Systems ,2016: 1-15.

[14] 付清. 模糊软集及其在决策中的应用[D].宁波:宁波大学,2014.

[15] 秦克云. 软集研究与展望[J]. 学术动态,2014, 4:36-38.