

Haar 小波的离散化消噪方法及其应用*

Denoising for Haar Wavelet Discrete and Its Application

李 杰, 丁宣浩

LI Jie, DING Xuan-hao

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004)

(School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 介绍一种 Haar 小波离散化消噪方法, 并应用该方法进行信号和图像消噪处理。首先将信号或图像用该方法实现计算机的离散化抽样取点, 然后结合小波阈值方对含噪信号或图像用 Haar 小波作消噪处理, 并进行离散平滑, 实现连续小波离散化处理。该方法对信号和图像的消噪处理的效果好, 具有广泛应用的价值。

关键词: Haar 小波 离散化 小波变换 图像平滑

中图分类号: TN911.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1002-7378(2007)02-0082-03

Abstract: This paper presents denoising for Haar wavelet to process the signal and image denoising. The denoising method is used to realize the signal and image dispersed in the computer before removing the noises with the wavelet threshold. As a result, the method proves effective and practical in terms of the signal and image denoising.

Key words: Haar wavelet, discrete, wavelet transform, image enhancement

近年来小波分析的理论发展及其实际应用正成为众多学科关注的热点, 小波分析是继 Fourier 分析后, 信号处理领域的一次革命性进步, 它优于 Fourier 分析的地方是, 它在时域和频域同时有良好的局域性, 而且由于它对高频成分可采用逐渐精细的时域取样步长, 从而可以聚焦到对象的任意细节。

实际应用中, 特别是在计算机信号与图像处理中, 为了确定有效算法, 要考虑离散抽样, 即连续小波变换的离散化。若直接用离散小波变换, 由于频率空间的范围越来越小, 代表细节分量的小波也越来越少, 每次小波变换后, 变换点的数目就减少一半, 这对于分析结果很不利, 而高级别的小波细节要用低级别的小波递推, 尺度或数据太稀疏有可能导致无法得出满意的结果。本文介绍一种 Haar 小波离散化方法, 并利用其对一维信号和二维图像进行小波

消噪, 取得了满意的消噪的效果。

1 连续小波离散化的条件

小波变换中定义小波变换为^[1,2]

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a, b \in R, a \neq 0.$$

(1.1)

实际应用中, 需把(1.1)式中的参数 a, b 取离散值, 固定伸缩步长 $a_0 > 1$, 位移步长 $b_0 \neq 0$, 取 $a = a_0^{-j}, b = kb_0 a_0^{-j}$ 。在计算机的处理中, 一般采用二进制数, 取 $a_0 = 2, b_0 = 1$, 得:

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k). \quad (1.2)$$

若用某小波分解函数 $f(t) \in L^2(R)$ 时, 该函数仍能以某种方式重构, 则称该小波的平移系 $\{\Psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$ 为小波框架。能生成小波框架的小波, 即离散化后可以重构的小波, 必须满足一定的框架条件。理论上, 函数经小波框架分解后, 可用相应的对偶框架将其恢复, 但一般情况下对偶框架很难精确得到, 或者所得到的对偶框架不是小波框架^[3,4]。

我们称下式所示的变换为离散小波变换^[5]

收稿日期: 2006-04-20

修回日期: 2007-04-14

作者简介: 李 杰(1980-), 女, 硕士研究生, 主要从事小波研究。

* 国家自然科学基金(10361003), 广西自然科学基金(0542046)资助项目。

$$W_k = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle = \sum_n f(n) \Psi_{j,k}^*(n). \quad (1.3)$$

任意平方可和的函数 $f(n)$ 可由重构小波 $\tilde{\Psi}_{j,k}(n)$ 重构:

$$f(n) = \sum_j \sum_k W_k \tilde{\Psi}_{j,k}(n). \quad (1.4)$$

在计算机实现时,并不都是在整数点 n 处进行抽样的,通常在抽样间隔 T_s 的整数倍处进行抽样,用函数 $f(nT_s)$ 表示. 其重构公式为:

$$f(nT_s) = \sum_j \sum_k W_k \tilde{\Psi}_{j,k}(nT_s). \quad (1.5)$$

实际应用中,通常认为信号的分辨率是有限的,这样就得到了有限尺度下的小波重构^[5]:

$$f(n) = \sum_{j=1}^J \sum_k W_k \tilde{\Psi}_{j,k}(n) + \sum_k V_k \tilde{\varphi}_k(n), \quad (1.6)$$

其中(1.6)式后面的一项能量非常小,以至于可以忽略不计.

小波波形的离散间隔与被分析信号的离散间隔必须相同,而任一尺度下的小波波形不能随意离散化,否则,离散后的小波将丧失原小波在该尺度下的特性. 在均匀采样的条件下,一个满足容许条件的小波在任意尺度下都必须至少被采样 N_{\min} 点,才能基本保持该小波的特性^[6].

2 Haar 小波的离散化及计算机实现

2.1 Haar 小波的离散化采样

对信号进行小波变换,当计算机采集实际波形信号时必须以一定的时间间隔采样数据,只要这个时间间隔满足先农采样定理^[7],就可以完全反应连续信号的全部信息. 鉴于计算机离散采样的特点,在算法实现上必须考虑要按照数字信号处理的方法实现连续信号的采样.

Haar 小波函数的定义形式为^[8]:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < 0.5, \\ -1, 0.5 \leq t < 1, \\ 0, \text{其他.} \end{cases} \quad (2.1)$$

单位阶跃信号通常定义为 $\epsilon(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$, 将 $\Psi(t)$ 用 $\epsilon(t)$ 及其时延的线性组合表示为:

$$\Psi(t) = \epsilon(t) - 2\epsilon(t - 0.5) + \epsilon(t - 1). \quad (2.2)$$

将 $\Psi(t)$ 经过伸缩和平移得

$$\Psi_{m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \Psi(2^m t - n) = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}}, 2^{-m}n \leq t < 2^{-m}(n + 0.5), \\ -2^{\frac{m}{2}}, 2^{-m}(n + 0.5) \leq t < 2^{-m}(n + 1), \\ 0, \text{其他.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Haar 小波的支集为 $[0, 1]$, 在这个区间以外 Haar 小波都为 0. 下面将 Haar 小波在 $[0, 1]$ 上进行离散化,取采样时间间隔 T_s 为 0.05, 采样的时间点为 p ($0 \leq p \leq 1$), 且 $p = 0.05n$, 由式(2.2) Haar 小波离散化采样值为

$$\begin{cases} \text{Haar}[n] = \Psi(p) = \epsilon(p) - 2\epsilon(p - 0.5) + \\ \quad \epsilon(p - 1), (n = 0, 1, \dots, 20, p = 0.05n) \\ \text{Haar}[21] = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

这样就完成了对各个具体点的 Haar 小波函数的取值.

2.2 连续小波变换的计算机实现

采用矩形法在计算机上实现式(2.2)的小波变换,即按照数字信号处理的习惯将式(2.2)按时间 $t \rightarrow mT_s$, 时移因子 $b \rightarrow nT_s$ 作处理得

$$WT_f(a, nT_s) = \frac{dt}{\sqrt{a}} \sum f(mT_s) \Psi\left[\frac{(m-n)T_s}{a}\right], \quad (2.5)$$

其中 dt 是采样时间间隔, $f(mT_s)$ 是待分析信号按照采样时间间隔 T_s 连续采集的数据, 设存放在数组 $tp[m]$ 中, Haar 小波离散化的式子中得,

$$WT_f(a, ndt) = \frac{dt}{\sqrt{a}} \sum_m tp[m] \cdot \text{Haar}\left(\frac{m-n}{a} dt\right), \quad (2.6)$$

将上述变换结果存放在数组 $tl[n]$ 中, 即

$$tl[n] = WT_f(a, ndt). \quad (2.7)$$

这样就得到计算机的实现.

3 Haar 小波变换的应用

3.1 Haar 小波对一维信号消噪

用 Haar 小波对一含噪信号进行消噪处理, 结果如图 1 所示.

由图 1 中 b, c 可以看出, 用 Haar 小波对含噪信号进行消噪, 已经将图 1b 中信号的大部分噪声消除, 取得了比较满意的消噪效果. 其不足之处是与原图像相比, 消噪后出现了一定的阶梯现象. 这是因为 Haar 小波本身就具有阶梯性.

3.2 Haar 小波对二维图像消噪

对二维图像进行处理时, 可转化为一维处理相当于两次一维信号的小波变换: (1) 先将二维信号的每一行看作一维信号进行变换; (2) 再以二维信号的每一列为单位进行变换.

图 2 为利用 Haar 小波对含噪图形进行消噪处

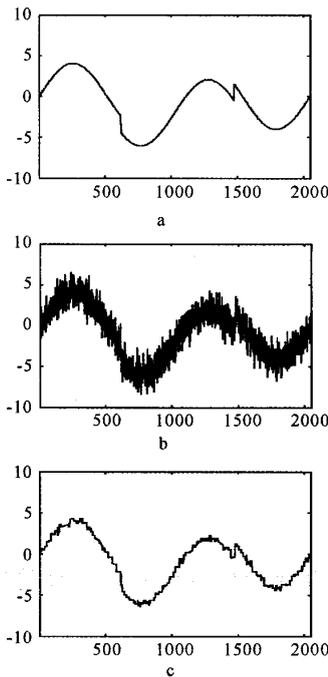


图1 Haar小波对一维信号消噪

a. 原始信号; b. 含噪信号(信噪比为3); c. Haar小波去噪后的信号

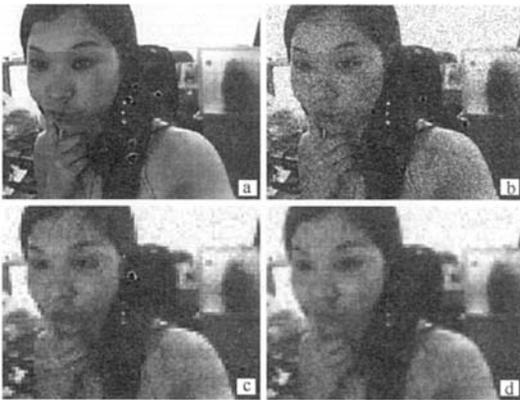


图2 Haar小波对二维图像消噪

a. 原始图像; b. 含噪图像; c. Haar独立阈值消噪图像; d. 平滑后的图像

理,并对处理后的图形进行离散取样,然后将其平滑.图2中a为一灰度图像,b为a的加噪图像,将b用Haar小波进行消噪处理得到c所示的图像.虽然取出了大部分高频噪声,但是得到的图像有些模糊,消噪效果并不是特别理想.那么再将c进行平滑化,得到d所示的结果.经过平滑处理更有利于消除噪声信号,消噪的效果比较理想.

4 结束语

将Haar小波离散化后进行小波变换的方法,应用于信号及图像的消噪处理当中,取得了满意的结果.因此将Haar小波离散化后进行小波变换是一种有效的方法,具有一定的实用价值.

参考文献:

- [1] 杨福生.小波分析的工程分析与应用[M].北京:科学技术出版社,1999.
- [2] 谭剑,陈祥训,郑健超.连续小波变换在使用中应满足的条件[J].电工技术学报,1998,13(5):57-60.
- [3] 崔锦泰.小波分析导论[M].程正兴,译.西安:西安交通大学出版社,1995.
- [4] 徐晨,赵瑞珍,甘晓冰.小波分析:应用算法[M].北京:科学出版社,2004.
- [5] 刘贵忠,邸双亮.小波分析及其应用[M].西安:西安电子科技大学出版社,1992.
- [6] 胡昌华,李国华,刘涛,等.基于MATLAB 6.x的系统分析与设计——小波分析[M].西安:西安电子科技大学出版社,2004.
- [7] 曹志刚,钱亚生.现代通信原理[M].北京:清华大学出版社,2002.
- [8] 王应生,徐亚宁.信号与系统[M].北京:电子工业出版社,2003:12-17.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第81页)

发,今后这种防火墙与入侵检测系统互动模型将会有更多、更广泛的应用。

参考文献:

- [1] 丁志芳,徐梦春.评说防火墙和入侵检测[J].网络安全技术与应用,2002,4(4):37-41.
- [2] 薛立.防火墙和入侵检测系统在企业信息网络中的应

用[J].中原工学院学报,2003,14(3):67-69.

- [3] 冯洪亮. IDP 让防火墙与IDS走向统一[EB/OL]. (2003-04-15) [2007-04-20]. <http://tech.ccidnet.com/art/232/20030415/43670-1.html>.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)