文章编号：1674-8085(2018)03-0005-04

图的邻点强可区别 V-全色数的一个上界

*蔡学鹏，任佰通，冯苗苗

（新疆农业大学数理学院，新疆，乌鲁木齐　830052）

摘　要：应用概率论中的 Lovasz 一般局部引理得出了图的邻点强可区别 V-全色数的上界，证明了对阶数不小于 3 且不含孤立边的简单图 G 的邻点强可区别 V-全色数不超过 49△，△≥5。

关键词：Lovasz 一般局部引理；邻点强可区别全染色；邻点强可区别 V−全染色

中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2018.03.002

AN UPPER BOUND OF THE ADJACENT-VERTEX-STRONGLY-DISTINGUISHING V-TOTAL CHROMATIC NUMBERS OF GRAPHS

*CAI Xue-peng, REN Bai-tong, FENG Miao-miao

(College of Mathematics and Physics, Xinjiang Agricultural University, Urumqi, Xinjiang 830052, China)

Abstract: An upper bound for adjacent-vertex-strongly-distinguishing V-total chromatic numbers is obtained by Lovasz local lemma of probability method. We show that adjacent vertex strongly distinguishing V-total chromatic numbers of graph G is not more than 49△for△≥5, where G is a simple graph with no isolated edge and the order not less than three.

Key words: Lovasz local lemma; the adjacent-vertex-strongly-distinguishing total coloring; the adjacent-vertex-strongly-distinguishing V-total coloring

0　引言

随着计算机的飞速发展，信息化和数字化技术的不断进步，许多实际问题的数学模型使离散型结构上的数字化技术得到了更多人的关注。图的染色理论[1]作为离散数学的一个重要组成部分，自然得到了快速发展，因此受到了国际数学界与工程界越来越广泛的重视。Noga Alon 在 2002 年数学国际大会上作了“离散数学方法与挑战”的大会报告后，图的染色成为一个很活跃、很新颖的研究邻域。1993 年 A.C.Burris 在他的博士论文中提到了点可区别正常边染色(也称强边染色)的概念[2]，此后 P.N.Balister 等人撰文[3]对该问题进行了深入的讨论，有关许多深入的结果都在国际权威杂志上刊出。在无线通讯网络中，为了防止网络中不同的长点之间信号频率的共振，必须保证不同站点之间拥有不同的通讯频率，无线传感器网络中相邻点通信冲突问题；交通运输中危险品运输的配送调度安全问题等，为了解决此问题，张忠辅教授首次提出了邻点可区别正常边染色[4]的概念，这一问题与点可区别边染色的研究具有相同的难度，因此国内外专家对此问题作了大量研究。2004 年张忠辅教授在邻点可区

收稿日期：2018-03-09；修改日期：2018-04-16

作者简介：*蔡学鹏(1991−)，男，甘肃武威人，助教，硕士，主要从事图与网络优化研究(Email:522916724@qq.com);
任佰通(1997−)，男，重庆人，新疆农业大学数理学院本科生(Email:3212989741@qq.com);
冯苗苗(1999−)，女，重庆人，新疆农业大学数理学院本科生(Email:2955398005@qq.com).

别正常边染色的基础上提出了邻点可区别全染色[5]的概念，2007 年又提出了邻点强可区别全染色[6]的概念。2010 年程辉等在邻点强可区别的基础上提出了邻点强可区别 EI-全染色[7]和邻点强可区别 V-全染色[8]的概念。

图染色理论中对于常见的特殊图，如路图、圈图、星图、扇图和轮图等，其染色数可以根据群染法、反证法和构造函数等方法得出确定的结果。对于一般图而言，上述方法却不再合理。而应用概率论中的 Lovasz 一般局部引理，可以很巧妙地得出一些不同类型的图染色的上界，该方法在文献[12-15]中有一些应用结果。本文在邻点强可区别全染色的概念中，弱化其中的一个条件，即相邻点可以染同色，从而得出了图的邻点强可区别 V-全色数的上界。

1 预备知识

定义 1[9] 设图G是阶数至少为 2 的连通图，映射 $f:V(G)\cup E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$，其中$k$ 为正整数，$C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(v)\}\cup\{f(uv)\mid uv\in E(G),v\in V(G)\}$。如果$f$ 满足：

1) 对任意的$uv\in E(G),f(u)\neq f(v)$；

2) 对任意的 $uv,uw\in E(G),u\neq w,f(uv)\neq f(uw)$；

3) 对任意的 $uv\in E(G),f(u)\neq f(uv),f(v)\neq f(uv)$；

4) 对任意的$uv\in E(G),u\neq v,C(u)\neq C(v)$，

则称f为图 G 的$k-$邻点强可区别全染色，简记为$k-AVSDTC$，又称

$$\chi_{\mathrm{ast}}(G)=\min\{k\mid G有k-\mathrm{A}VSDTC\}$$

为 G 的邻点强可区别全色数。

定义 2[9] 设图G是阶数至少为 2 的连通图，映射 $f:V(G)\cup E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$，其中$k$ 为正整数，$C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(v)\}\cup\{f(uv)\mid uv\in E(G),v\in V(G)\}$。如果$f$满足：

1) 对任意的 $uv,uw\in E(G),u\neq w,f(uv)\neq f(uw)$；

2) 对任意的 $uv\in E(G),f(u)\neq f(uv),f(v)\neq f(uv)$；

3) 对任意的$uv\in E(G),u\neq v,C(u)\neq C(v)$，

则称f为图 G 的$k-$邻点强可区别 V-全染色，简记为 k-$AVSDVTC$，又称

$$\chi^{v}{}_{\mathrm{ast}}(G)=\min\{k\mid G有k-\mathrm{A}VSDVTC\}$$

为 G 的邻点强可区别 V-全色数。该定义将定义 1 中的条件 1)弱化了，即相邻点可以染同色。

引理 1[10-11] (一般局部引理)考虑(典型的坏)事件$\varepsilon=\{A_1,A_2,\cdots A_n\}$，对每一$A_i(1\le i\le n)$，存在$D_i\in\varepsilon$($D_i$可以为空)，使得每一个 A_i 与$\varepsilon-(D_i\cup A_i)$互相独立。如果$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$，使得对每个$1\le i\le n$，$P(A_i)\le x_i\prod_{A_j\in D_i}(1-x_j)$，则$\varepsilon$ 中所有事件都不发生的概率至少为$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)>0$。

2 主要结论

定理 1 对阶数不小于 3 且不含孤立边的简单图G，其中Δ是图G 的最大度，当$\Delta\ge 5$时有

$$\chi^{v}{}_{\mathrm{ast}}(G)\le 49\Delta.$$

证明：首先用映射 $f:V(G)\cup E(G)\to\{1,2,\cdots,K\}$表示对图 G 的点和边的随机染色，令$K=M\Delta$（M 为最后需要确定的常数)，并对任意的 $u,v\in V(G),uv\in E(G)$，其中 $f(u)$，$f(v)$ 和$f(uv)$ 都是从$\{1,2,\cdots,K\}$中随机的等概率的选取颜色。为了保证该染色方法是邻点强可区别 V-全染色的，则必须满足以下 3 个条件：

1) 边染色是正常的，既没有两条相邻的边染成同色；

2) 点和边的染色是正常的，即任意一条边与他的悬挂点染不同颜色；

3) 色集合是正常的，即任意相邻两点的色集合不同，这里的色集合为该点的颜色，与他关联边的颜色，以及与他相邻点的颜色所组成的集合。下面将分三步完成该定理的证明。

第一步：定义以下三种类型的坏事件

类型 1：对每对相邻边e_1和e_2，令E_1为边e_1和

e_2染成同色的事件；

类型 2：对每一条边$e=uv$,令E_2为边e与某一悬挂点u或v染成同色的事件；

类型 3：对相邻两点u和v，令E_3为点u与v的色集合$C(u)=C(v)$的事件，即

$$C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(v)\}\cup$$
$$\{f(uv)\,|\,uv\in E(G),v\in V(G)\}$$

如果坏事件E_1，E_2，E_3不发生的概率为正，即说明坏事件不发生是可能的，则称上述条件是满足的，即G存在邻点强可区别V-全染色。下面计算每一个坏事件发生的概率：

当一条边的颜色确定之后，与它相邻的另一条边的颜色若要与该条边的颜色相同，则从集合$\{1,2,\cdots,K\}$中取到该颜色的概率$P(E_1)=\dfrac{1}{K}$；

一条边有两个悬挂点，其中一个悬挂点与其关联边染同色的概率为$\dfrac{1}{K}$，那么有两个悬挂点，其概率为$\dfrac{2}{K}$，故$P(E_2)=\dfrac{2}{K}$；

当两个相邻点的色集合相同时，该色集合里的色数为集合$\{2,3,\cdots,2\Delta-2\}$中的某一个，则有$\begin{pmatrix}K\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}K\\3\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}K\\2\Delta-2\end{pmatrix}$种取法，故

$$P(E_3)=\frac{1}{\begin{pmatrix}K\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}K\\3\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}K\\2\Delta-2\end{pmatrix}}\le\frac{1}{2^{2\Delta-2}}.$$

概率$P(E_3)$的证明如下：

由二项式定理知，

$$(x+1)^K=C_K^0x^K+C_K^1x^{K-1}+C_K^2x^{K-2}+\cdots+C_K^Kx^0$$

当x=1 时，该式为$C_K^0+C_K^1+C_K^2+\cdots+C_K^K=2^K$。故

$$C_K^0+C_K^1+C_K^2+\cdots+C_K^{2\Delta-2}\le C_K^0+C_K^1+C_K^2+\cdots+C_K^K=2^K$$

$$2^{2\Delta-2}<C_K^2+C_K^3+\cdots+C_K^{2\Delta-2},$$

所以$P(E_3)\le 2^{2\Delta-2}$成立。

第二步：构造相关图并计算相关事件数

构造相关图(Related Graphs) R，其结点为该三种类型的所有事件，其中两个结点E_X和E_Y相关，当且仅当X和Y包含一个公共元素，因为每个事件E_X的发生，仅依赖于X的元素，故R是上述事件的相关图，见表 1。

表 1　相关图 R

Table 1 Related Graphs R

事件	E_1	E_2	E_3
E_1	$4(\triangle-1)$	4	$3\triangle-2$
E_2	$2(\triangle-1)$	$2\triangle$	$\triangle^2$
E_3	$2\triangle-1$	$4\triangle$	$2\triangle^2$

第三步：构造常数证明以下三个不等式成立

设$\dfrac{2}{K},\dfrac{4}{K},\dfrac{1}{2^{2\Delta-1}}$是依次与类型 1、类型 2、类型 3 相关的常数。用一般局部引理证明若坏事件E_1，E_2，E_3不发生的概率为正，即说明邻点强可区别 V-全染色是存在的。则只需要证明以下三个不等式成立：

$$P(E_1)\le 2P(E_1)\cdot(1-\frac{2}{K})^{4\Delta-4}\cdot(1-\frac{4}{K})^4\cdot(1-\frac{1}{2^{2\Delta-1}})^{3\Delta-2}\tag{1}$$

$$P(E_2)\le 2P(E_2)(1-\frac{2}{K})^{2\Delta-2}\cdot(1-\frac{4}{K})^{2\Delta}\cdot(1-\frac{1}{2^{2\Delta-1}})^{\Delta^2}\tag{2}$$

$$P(E_3)\le 2P(E_3)(1-\frac{2}{K})^{2\Delta-1}\cdot(1-\frac{4}{K})^{4\Delta}\cdot(1-\frac{1}{2^{2\Delta-1}})^{2\Delta^2}\tag{3}$$

由于不等式$(1-\dfrac{1}{x})^x\ge\dfrac{1}{4}$,对$\forall x>2$ 成立，故(1)-(3)式将分别可化简为以下三个不等式：

$$(1-\frac{2}{K})^{4\Delta-4}\cdot(1-\frac{4}{K})^4\cdot(1-\frac{1}{2^{2\Delta-1}})^{3\Delta-2}\ge\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{8\Delta+14}{K}+\frac{3\Delta-2}{2^{2\Delta-1}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16\Delta+24}{K}+\frac{6\Delta-4}{2^{2\Delta-1}}}\ge\frac{1}{2}\tag{4}$$

$$(1-\frac{2}{K})^{2\Delta-2}\cdot(1-\frac{4}{K})^{2\Delta}\cdot(1-\frac{1}{2^{2\Delta-1}})\Delta^2\ge\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{24\Delta-8}{K}+\frac{2\Delta^2}{2^{2\Delta-1}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24\Delta-8}{K}+\frac{\Delta^2}{2^{2\Delta-1}}}\ge\frac{1}{2}\tag{5}$$

$$(1-\frac{2}{K})^{2\Delta-1}\cdot(1-\frac{4}{K})^{4\Delta}\cdot(1-\frac{1}{2^{2\Delta-1}})^{2\Delta^2}\ge\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{20\Delta-2}{K}+\frac{2\Delta^2}{2^{2\Delta-1}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40\Delta-4}{K}+\frac{4\Delta^2}{2^{2\Delta-1}}}\ge\frac{1}{2}\tag{6}$$

证明(4)式只需证：

$$\frac{16\Delta+24}{K}+\frac{6\Delta-4}{2^{2\Delta-1}}\le 1$$

解得 $M_{\min}(1)=13,\Delta_{\min}(1)=5$。

同理对于(2)式有：

$$\frac{24\Delta-8}{K}+\frac{\Delta^2}{2^{2\Delta-1}}\le 1$$

解得 $M_{\min}(2)=25,\Delta_{\min}(2)=5$。

同理对于(3)式有：

$$\frac{40\Delta-4}{K}+\frac{4\Delta^2}{2^{2\Delta-1}}\le 1$$

解得 $M_{\min}(3)=49,\Delta_{\min}(3)=5$。

综上所述，取

$$M=\max\{M_{\min}(1),M_{\min}(2),M_{\min}(3),\Delta_{\min}(1),\Delta_{\min}(2),\Delta_{\min}(3)\}=49$$

当 $\Delta\ge 5$ 时，定理 1 成立。

参考文献：

[1] Bondy J A, Marty USR. Graph Theory with Application[M]. New York: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[2] Burris A C, Schelp R H. Vertex-Distinguishing Proper Edge-Coloring[J]. J of Graph Theory, 1997, 26(2):73-82.

[3] Balister P N, Riordan O M, Schelp R H. Vertex - distinguishing edge colorings of graphs[J]. Journal of graph theory, 2003, 42(2): 95-109.

[4] Zhang Z, Liu L, Wang J. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5): 623-626.

[5] Zhang Z, Chen X, Li J, et al. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2005, 48(3): 289-299.

[6] 张忠辅,程辉,姚兵,等. 图的邻点强可区别全染色[J].中国科学(A 辑),2007, 37(9):1073-1082.

[7] Cheng H, Wang Z. Adjacent vertex strongly distinguishing EI-total coloring of graphs[J].Shandong Univ.Nat.Sci.2010(3):289-299.

[8] 程辉,谢雁. 图的邻点强可区别 VI-全染色[J].兰州大学学报:自然科学版, 2010,46(6): 97-101.

[9] 安明强. 点可区别全色数的一个上界[J].天津科技大学学报, 2009, 24(5):68-70.

[10] Michael M, Bruce R. Graph coloring and the probabilistic method[M]. New York :Springer, 2002: 1329-1356.

[11] Alon N, Spencer J H. The Probabilistic Method[M]. New York:John Wiley &Sons, 1992.

[12] 晁福刚,张忠辅,强会英. 图的邻点可区别全色数的一个上界[J].纯粹数学与应用数学,2010,26(1):91-95.

[13] 强会英,李沐春,张忠辅,等. 距离限制下的点可区别全色数的一个上界[J].应用数学学报,2011, 34(3):554-559.

[14] 强会英,王洪申. 图的邻点强可区别全色数的一个上界[J].数学进展, 2013, 42(6):801-805.

[15] 崔俊峰. 图的点可区别边色数的一个上界[J].首都师范大学学报:自然科学版,2017, 38(1):6-8.