DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.013
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 284~287

同分布 ψ-混合序列的最大值不等式及其应用*

Maximum Inequality and Its Application of ψ-Mixing Sequence with Identical Distribution

邢国东,杨善朝
Xing Guodong, Yang Shanchao

(广西师范大学数学系,广西桂林 541004)
(Department of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 建立同分布 ψ-混合序列的最大值不等式.并且作为应用,获得了随机变量 $\sup_{n\geq 1}\frac{S_n}{n}$ 的一阶矩及 $p(p\geq 1)$阶矩分别存在有限的充要条件.

关键词: ψ混合序列 最大值不等式 极大值函数
中图法分类号: O211.4 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0284-04

Abstract The maximum inequality of ψ-mixing sequence with identical distribution was established. As its application, the sufficient and essential condition of one moment and $p(p\geq 1)$ moment for the variable $\sup_{n\geq 1}\frac{S_n}{n}$ were obtained.

Key words ψ-mixing sequence, maximum inequality, maximum function

1 相关定义和引理

定义 1.1 设 $\{X_n, n\geq 1\}$为随机变量序列,记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, F_1^k = \sigma(X_i, 1\leq i\leq k), F_k^{\infty} = \sigma(X_i, i\geq k)$, N为全体自然数集合,

$$\psi(n) = \sup_{k\in N}\sup_{A\in F_1^k, B\in F_{k+n}^{\infty}, P(A)P(B)>0} |P(AB) - P(A)P(B)| / P(A)P(B),$$

称 $\{X_n, n\geq 1\}$是 ψ-混合的,如果当 $n\to\infty$时, $\psi(n)\to 0$.

给出定义后,为了后面证明的方便,先给出 2个相关引理:

引理 1.1 设 $\{X_n, n\geq 1\}$是 ψ-混合随机变量序列,且$\sum_{i=1}^{\infty}\psi(i) < \infty$,又设 $EX_n = 0, EX_n^2 < \infty$ $(n\geq 1)$,则存在正常数 c,对 $\forall n\geq 1$,都有

$$E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^2 \leq c\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^2.$$

证明 见文献[1].

引理 1.2 设 X为随机变量.则

$$E|X|\log^+|X| < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P(|X|\geq ij) < \infty.$$

证明 注意到

$$\int_1^{|X|}\left(\int_0^{\infty} I(|X|\geq xy)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_1^{|X|}\left(\int_0^{\infty} I(|X|/y\geq x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_1^{|X|}\frac{|X|}{y}\mathrm{d}y = |X|\log^+|X|.$$

于是有

$$E|X|\log^+|X| = E\int_1^{|X|}\left(\int_0^{\infty} I(|X|\geq xy)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = E\int_1^{\infty}\left(\int_0^{\infty} I(|X|\geq xy)I(|X|\geq y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = E\int_1^{\infty}\left(\int_0^{1} I(|X|\geq xy)I(|X|\geq y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + E\int_1^{\infty}\left(\int_1^{\infty} I(|X|\geq xy)I(|X|\geq y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =: E(U) + E(V). \quad (1.1)$$

由于当 $x\geq 1$时,有 $\{\omega: |X(\omega)|\geq xy\}\subset\{\omega: |X(\omega)|\geq y\}$,所以

$$E(V) = E\int_1^{\infty}\left(\int_1^{\infty} I(|X|\geq xy)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

当 $E|X|\log^+|X| < \infty$时,由(1.1)式知 $0\leq E(V)\leq E|X|\log^+|X| < \infty$.所以由 Fubini定理[2]

收稿日期: 2004-10-15
修回日期: 2005-06-28
作者简介: 邢国东(1973-),男,安徽人,在读研究生,主要从事极限理论,金融统计方面的研究工作.
* 广西自然科学基金资助项目(No. 04047029).

有

$$E(V)=E\int_1^\infty\left(\int_1^\infty I(|X|\geqslant xy)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_1^\infty\int_1^\infty P(|X|\geqslant xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty.$$

故而

$$\sum_{i=2}^\infty\sum_{j=2}^\infty P(|X|\geqslant ij)\leqslant\int_1^\infty\int_1^\infty P(|X|\geqslant xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty,$$

另外 $\sum_{i=1}^\infty P(|X|\geqslant i)\leqslant E|X|<\infty$，于是

$$\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty P(|X|\geqslant ij)=\sum_{i=2}^\infty\sum_{j=2}^\infty P(|X|\geqslant ij)+\sum_{i=1}^\infty P(|X|\geqslant i)+\sum_{j=1}^\infty P(|X|\geqslant j)<\infty.$$

证毕.

反之，当 $\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty P(|X|\geqslant ij)<\infty$ 时，有

$$\sum_{i=1}^\infty P(|X|\geqslant i)\leqslant\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty P(|X|\geqslant ij)<\infty.$$

从而 $\int_1^\infty P(|X|\geqslant y)\,\mathrm{d}y<\infty$ 且 $E|X|<\infty$. 再由 (1.1) 式，显然

$$E(U)\leqslant E\int_1^\infty\left(\int_0^1 I(|X|\geqslant y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=E\int_1^\infty I(|X|\geqslant y)\,\mathrm{d}y=\int_1^\infty P(|X|\geqslant y)\,\mathrm{d}y<\infty,$$

另外，由 $\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty P(|X|\geqslant ij)<\infty$ 知

$$\int_1^\infty\int_1^\infty EI(|X|\geqslant xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^\infty\int_1^\infty P(|X|\geqslant xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty.$$

故由 Fubini 定理[2] 有

$$E(V)=E\int_1^\infty\left(\int_1^\infty I(|X|\geqslant xy)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y<\infty.$$

这样由 (1.1) 式可知 $E|X|\log^+|X|<\infty$. 综上可知结论成立.

接下来，本文将讨论同分布的上述序列的正则和的最大值 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|S_i|}{i}$ $(n\geqslant 1)$ 的分布函数的上界，并由此而讨论正则和极大值函数 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{|S_n|}{n}$ 的矩的存在性问题.

2 主要结果及其证明

定理 2.1 $\{X,X_n,n\geqslant 1\}$ 是同分布的 φ-混合随机变量序列，且 $\sum_{i=1}^\infty\varphi(i)<\infty$，记 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$，则有 $\forall\lambda>0$,

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|S_i|}{i}>5\lambda\right)\leqslant(4c+6)\sum_{i=1}^n P(|X|>\lambda i),$$

其中，c 由引理 1.1 而确定.

证明　首先令 $X_i\geqslant 0,\lambda=1$，且 $n\geqslant 1$.

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n}\frac{S_i}{i}>4\right)=P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\max_{2^{i-1}\leqslant j\leqslant 2^i}\frac{S_j}{j}>4\right)\leqslant$$
$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{S_{2^i}}{2^i}>2\right)=P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{S_{2^i}}{2^i}>2,\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n}\frac{X_i}{i}\leqslant 1\right)+$$
$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{S_{2^i}}{2^i}>2,\max_{1<i<2^i}\frac{X_i}{i}>1\right)\leqslant P\left(\max_{1<i<n}\frac{S_{2^i}}{2^i}>2,\right.$$
$$\left.\max_{1<i\leqslant 2^n}\frac{X_i}{i}\leqslant 1\right)P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n}\frac{X_i}{i}>1\right)\leqslant$$
$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum_{j=1}^{2^i}X_iI(X_j\leqslant j)}{2^i}>2\right)+\sum_{i=1}^{2^n}P(X_i>i),\tag{2.1}$$

固定 i，则 $\{X_jI(X_j\leqslant 2^i),j\geqslant 1\}$ 仍是 φ-混合序列. 故由引理 1.1 得

$$E\left(2^{-i}\sum_{j=1}^{2^i}X_jI(X_j\leqslant 2^i)-EXI(X\leqslant 2^i)\right)^2=$$
$$E\left(2^{-i}\sum_{j=1}^{2^i}X_jI(X_j\leqslant 2^i)-2^{-i}\sum_{j=1}^{2^i}EX_jI(X_j\leqslant 2^i)\right)^2\leqslant c2^{-i}EX^2I(X\leqslant 2^i).\tag{2.2}$$

由 chbshev 不等式及 (2.2) 式有

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|2^{-i}\sum_{j=1}^{2^i}X_jI(X_j\leqslant 2^i)-EXI(X\leqslant 2^i)\right|>1\right)\leqslant\sum_{i=1}^n P\left(\left|2^{-i}\sum_{j=1}^{2^i}X_jI(X_j\leqslant 2^i)-EXI(X\leqslant 2^i)\right|>1\right)\leqslant$$
$$c\sum_{i=1}^n 2^{-i}EX^2I(X\leqslant 2^i)\leqslant c\sum_{i=1}^\infty 2^{-i}EXI(X\leqslant 1)+$$
$$c\sum_{i=1}^n 2^{-i}\sum_{k=1}^i EX^2I(2^{k-1}<X\leqslant 2^k)\leqslant cEXI(X\leqslant 1)+$$
$$2c\sum_{k=1}^n 2^{-k}EX^2I(2^{k-1}<X\leqslant 2^k)\leqslant 2cEXI(X\leqslant 2^n).\tag{2.3}$$

于是由 (2.1) 及 (2.3) 式有

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n}\frac{S_i}{i}>4\right)\leqslant 2cEXI(X\leqslant 2^n)+$$
$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}EXI(X\leqslant 2^i)>1\right)+\sum_{i=1}^{2^n}P(X_i>i),$$

故而

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n}\frac{S_i}{i}>4\right)\leqslant(2c+1)EXI(X\leqslant 2^n)+\sum_{i=1}^{2^n}P(X>i).\tag{2.4}$$

下面讨论当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时的最大值情形. 当 $n=1$ 时，定理显然正确. 对 $n\geqslant 2$，有 $m\geqslant 1$ 使 $2^m\leqslant n\leqslant 2^{m+1}$,

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n}\frac{S_i}{i}>4\right)\leqslant P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^m}\frac{S_i}{i}>4\right)+$$
$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^m}\frac{S_i}{i}<4<\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{S_i}{i}\right)=\text{Ⅰ}+\text{Ⅱ}.$$

采取与上同样的截尾术,对于Ⅱ有

$$\text{Ⅱ} \leqslant P\Big(\max_{2^m\leqslant i\leqslant n}\frac{S_i}{i} > 4, \max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i}\leqslant 1\Big) + P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i} > 1\Big) \leqslant P\Big(2^{-m}\sum_{i=1}^{n} X_i I(X_i\leqslant i) > 4\Big) + \sum_{i=1}^{n} P(X_i > i) \leqslant P\Big(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i I(X_i\leqslant i) > 2\Big) + \sum_{i=1}^{n} P(X_i > i) \leqslant (2n)^{-1}\sum_{i=1}^{n} EX_i I(X_i\leqslant i) + \sum_{i=1}^{n} P(X_i > i) \leqslant 2^{-1}EXI(X\leqslant n) + \sum_{i=1}^{n} P(X_i > i), \quad (2.5)$$

由于 $2^m\leqslant n$,由(2.4)式有

$$\text{Ⅰ} \leqslant (2c+1)EXI(X\leqslant n) + \sum_{i=1}^{n} P(X > i), \quad (2.6)$$

因此由(2.5)、(2.6)式有

$$P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{S_i}{i} > 4\Big) \leqslant (2c+2)EXI(X\leqslant n) + 2\sum_{i=1}^{n} P(X > i). \quad (2.7)$$

注意到 $\{X_i I(X_i > 1), i\geqslant 1\}$ 是同分布的 φ-混合随机变量序列,因而我们从(2.7)式可得

$$P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{S_i}{i} > 5\Big) = P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum_{j=1}^{i}(X_jI(X_j\leqslant 1) + X_jI(X_j > 1))}{i} > 5\Big) \leqslant P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum_{j=1}^{i}X_jI(X_j > 1)}{i} > 4\Big) \leqslant (2c+2)EXI(1 < X\leqslant n) + 2\sum_{i=1}^{n} P(X > i) \leqslant (4c+6)\sum_{i=1}^{n} P(X > i). \quad (2.8)$$

对于一般情形,注意到 $\{|X_i|, i\geqslant 1\}$ 是同分布的 φ-混合随机变量序列,因而由(2.8)式有

$$P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\frac{|S_i|}{\lambda}}{i} > 5\Big) \leqslant P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum_{j=1}^{i}\frac{|X_j|}{\lambda}}{i} > 5\Big) \leqslant (4c+6)\sum_{i=1}^{n} P(|X| > \lambda i).$$

而 $P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\frac{|S_i|}{\lambda}}{i} > 5\Big) = P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|S_i|}{i} > 5\lambda\Big)$,故而结合上式,定理得证.

应用定理 2.1,可得如下结论:

推论 2.1 设 $\{X, X_n, n\geqslant 1\}$ 是同分布的 φ-混合随机变量序列,且 $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(i) < \infty$,记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$,则对 $p\geqslant 1$,有

(a) $E|X|\log^+|X| < \infty$, $E|X|^p < \infty$;

(b) $E\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{S_n}{n}\right|^p < \infty$,

两者等价,其中 $\log^+|X| = \max\{\log|X|, 0\}$.

证明 首先证由(a)⇒(b).分两种情形来证:

(Ⅰ)当 $p > 1$ 时,由定理 2.1以及矩与级数的关系知

$$E\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{S_n}{n}\right|^p = \lim_{n\to\infty}E\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{S_i}{i}\right|^p \leqslant c\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{S_i}{i}\right|^p \geqslant j\Big) \leqslant c\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P(|X|\geqslant ij^{1/p}) = c\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P\Big(\Big(\frac{|X|}{i}\Big)^p\geqslant j\Big) \leqslant c\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E|X|^p}{i^p} = cE|X|^p\sum_{i=1}^{\infty}i^{-p} \leqslant cE|X|^p < \infty;$$

(Ⅱ)当 $p = 1$ 时,由引理 1.2以及上述过程有

$$E\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{S_n}{n}\right| \leqslant c\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P(|X|\geqslant ij) \leqslant cE|X|\log^+|X| < \infty.$$

综上所述,结论成立.

下证(b)⇒(a).当 $p > 1$ 时结论显然.故只需证当 $p = 1$ 时的情形.即要证由 $E\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{S_n}{n}\right| < \infty$ 可推出 $E|X|\log^+|X| < \infty$.对 $\forall n\geqslant 1, m\geqslant 1$,由于

$$P\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{|X_j|}{j} > m\Big) = \sum_{j=1}^{m}P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant j-1}\frac{|X_i|}{i}\leqslant m, \frac{|X_j|}{j} > m\Big),$$

故

$$\sum_{j=1}^{n}P\Big(\frac{|X_j|}{j} > m\Big) = P\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{|X_j|}{j} > m\Big) + \sum_{j=1}^{n}P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant j-1}\frac{|X_i|}{i} > m, \frac{|X_j|}{j} > m\Big). \quad (2.9)$$

注意到

$$\sum_{j=1}^{n}P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant j-1}\frac{|X_i|}{i} > m, \frac{|X_j|}{j} > m\Big) = \sum_{j=1}^{n}EI\Big(\frac{|X_j|}{j} > m\Big)I\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant j-1}\frac{|X_i|}{i} > m\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n}EI\Big(\frac{|X_j|}{j} > m\Big)I\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i} > m\Big) \leqslant E\sum_{j=1}^{n}\Big[I\Big(\frac{|X_j|}{j} > m\Big) - P\Big(\frac{|X_j|}{j} > m\Big)\Big]I\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i} > m\Big) + \sum_{j=1}^{n}P\Big(\frac{|X_j|}{j} > m\Big)P\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i} > m\Big) = \text{Ⅰ} + \text{Ⅱ}. \quad (2.10)$$

由于 $\{I(\frac{|X_j|}{j} > m), j\geqslant 1\}$ 是 φ-混合的,故由柯西-许瓦兹不等式及引理 1.2有

$|\text{Ⅰ}| \leqslant$

$$\frac{}{E\sum_{j=1}^{n}[I(\frac{|X_j|}{j}>m)-P(\frac{|X_j|}{j}>m)]^2 P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i}>m)}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}P(\frac{|X_j|}{j}>m)\cdot 2cP(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i}>m)\leqslant$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}P(\frac{|X_j|}{j}>m)+cp(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i}>m).$$

由上式及(2.9)、(2.10)式有

$$\frac{3}{4}\sum_{j=1}^{n}P(\frac{|X_j|}{j}>m)\leqslant(1+c)P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i}>m)+\sum_{j=1}^{n}P(\frac{|X_j|}{j}>m)P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i}>m). \quad (2.11)$$

由 $E\sup_{n\geqslant 1}|\frac{S_n}{n}|<\infty$,有 $E\sup_{n\geqslant 1}|\frac{X_n}{n}|<\infty$.故当 $m\to\infty$ 时,

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i}>m)\leqslant P(\sup_{i\geqslant 1}\frac{|X_i|}{i}>m)\to 0,$$

所以当 m 足够大时有 $P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i}>m)\leqslant 1/4$,再结合(2.11)式当 m 足够大时有

$$\sum_{j=1}^{n}P(\frac{|X_j|}{j}>m)\leqslant 2(1+c)P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|X_i|}{i}>m),$$

令 $n\to\infty$ 有

$$\sum_{j=1}^{\infty}P(\frac{|X_j|}{j}>m)\leqslant 2(1+c)P(\sup_{i\geqslant 1}\frac{|X_i|}{i}>m),$$

从而

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P(\frac{|X_j|}{j}>m)\leqslant 2(1+c)\sum_{m=1}^{\infty}P(\sup_{i\geqslant 1}\frac{|X_i|}{i}>m)\leqslant 2(c+1)(1+E\sup_{n\geqslant 1}|\frac{X_n}{n}|)<\infty.$$

而由引理知上式正好与 $E|X|\log^+|X|<\infty$ 是等价的.故而推论得证.

参考文献:

[1] 杨善朝.混合序列加权和的强收敛性[J].系统科学与数学,1995,15(3):254-265.

[2] 严加安.测度论讲义[M].北京:科学出版社,1998.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第283页 Continue from page 283)

$$\frac{\|d_{k+1}\|^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2}=\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2}-\frac{2}{g_{k+1}^T d_{k+1}}-\frac{\|g_{k+1}\|^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2}=\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2}-(\frac{1}{\|g_{k+1}\|}+\frac{\|g_{k+1}\|}{g_{k+1}^T d_{k+1}})^2+\frac{1}{\|g_{k+1}\|^2}\leqslant\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2}+\frac{1}{\|g_{k+1}\|^2}.$$

又因为 $\frac{\|d_1\|^2}{(g_1^T d_1)^2}=\frac{1}{\|g_1\|^2}$,所以

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\|g_i\|^2}, \quad (23)$$

由(20),(23)式可得

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2}\leqslant\frac{k}{\nabla^2},$$

从而有 $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2}=\infty$,这与引理2矛盾.定理得证.

参考文献:

[1] Fletcher R, Reeves C. Function minimization by conjugate gradients[J]. Comput J, 1963, 7: 163-168.

[2] Polak E, Ribiere G. Note sur la convergence de directions conjugates [J]. Rev Francaise Informat Recherche Opertionelle 3e Annee, 1969, 16: 35-43.

[3] Hestenes M R, Stiefel E L. Methods of conjugate gradients for soloing linear systems [J]. J Res Nat Bur Standards Sect, 1952, 5(49): 409-436.

[4] Fletcher R. Practical Methods of Optimization[M] (2nd). New York: Wiley-Interscience, 1987. 63-76.

[5] Dai Y H, Yuan Y X. A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property [J]. SIAM Journal on Optimization, 1999, 10(1): 177-182.

[6] 陈元媛,曹兴涛,杜守强.一种新的非线性共轭梯度法的全局收敛性[J].青岛大学学报,2004,17(2):22-24.

[7] 杜守强,陈元媛.一类在新的线搜索下的共轭梯度法[J].滨州师专学报,2002,18(4):16-18.

[8] Dai Y H. Conjugate gradient methods with Armijo-type line search [J]. Acta Mathematical Applicate Sinica (English Series), 2002, 18(1): 123-130.

(责任编辑:黎贞崇)