文章编号：1674-8085(2017)05-0017-03

正多面体对称群矩阵元素的 MATLAB 自动化算法

余　涛，*欧阳芬，易　华，颜昌元

(井冈山大学数理学院，江西，吉安 343009)

摘　要：利用万花筒和基础根系统原理，结合正多面体的几何特征，建立了具有正多面体群对称性的球面 tiling 剖分方法，并借助 Matlab 工具，实现正多面体群矩阵元素的计算自动化。本文方法可进一步推广到 4 维空间，对正多胞体做等价对称剖分，并计算其成千上万的对称群矩阵元素。

关键词：对称群；正多面体；基础根系统；万花筒原理

中图分类号：TP391　　**文献标识码**：A　　DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2017.05.004

MATLAB AUTOMATIC CALCULATION OF MATRIX ELEMENTS OF REGULAR POLYHEDRAL SYMMETRY GROUP

YU Tao, *OUYANG Fen, YI Hua,YAN Chang-yuan

(School of Mathematics and Physics, Jinggangshan University, Ji'an, Jiangxi 343009, China)

Abstract：Using the principles of kaleidoscope and fundamental root system and combined with the geometry character of polyhedral, we realize the spherical tilings that have symmetries of regular polyhedral group. Based on Matlab, an automatic computation method of matrix elements of regular polyhedral groups is presented. The proposed method could be extended to the regular polytopes in 4 dimensional spaces, which is used to calculate the tens of thousands of symmetry matrix elements.

Key words：symmetry group; regular polyhedral; fundamental root system; kaleidoscope principle

0　引言

所谓正多面体，是指多面体的各个面都是全等的正多边形，并且各个多面角都是全等的多面角，它们具有高度的对称性。众所周知，3 维空间的正多面体只有 5 个，即正四面体，正六面体（立方体)，正八面体，正十二面体和正二十面体[1-2]。自然界存在许多具有正多面体结构的物质，如食盐的结晶体是正六面体，明矾的结晶体是正八面体，艾滋病病毒具有正二十面体结构。

人们对正多面体的研究始于古希腊时期，柏拉图（Plato）在《蒂迈欧篇》描绘了 5 种正多面体，他将 4 种易构造的多面体[3]即正四面体、正六面体、正八面体、正二十面体，配给恩培多克勒（Empedocles)的一切物质的四种基本“元素”——火、气、水、土，而剩下的正十二面体就对应包围我们的宇宙。学界甚至有一种颇具可能性的猜测，几何巨著《几何原本》作者的创作动机，旨在论证五个正多面体的完备性[4]，由此可见其重要性。在西方，人们更愿意称正多面体为柏拉图体[5]。

群论是高等数学的基础课，它在抽象代数中

收稿日期：2017-06-09；修改日期：2017-09-14
基金项目：江西省教育厅科技计划项目(GJJ160758)；吉安市软科学计划项目(吉市科计字[2012]32-7)；井冈山大学博士科研启动基金项目(JZB11002)；井冈山大学自然科学科研基金项目(JZ11001).
作者简介：余　涛(1983-)，男，江西吉安人，讲师，博士，主要从事多尺度计算和群论研究(E-mail:yutao@jgsu.edu.cn);
*欧阳芬(1973-)，女，江西吉安人，讲师，主要从事高等数学教学研究(E-mail: 76400405@qq.com);
易　华(1973-)，男，湖北松滋人，讲师，博士，主要从事小波分析及图像处理研究(E-mail:876145777@qq.com);
颜昌元(1980-)，男，湖北洪湖人，助教，硕士，主要从事有限群研究(E-mail:yanyuan05@outlook.com).

具有重要地位。群的概念在数学的许多分支都有出现，而且群论的研究方法也对抽象代数的其它分支有重要影响。群论的一大特征是极为高度的抽象性。实际上，群论学习的最好切入点是结合其在几何上的案例，用生动、可见、熟悉的几何结构，理论结合实际地理解群论。本文将用人们熟知的正多面体，根据其几何意义，利用便利的Matlab 工具，完成正多面体对称变换的自动化计算。通过这一贴切的几何案例，更清晰地理解群论。

本文将在第二节介绍反射变换及正多面体的基础根系统。有此准备后，在第三节，利用万花筒原理，实现球面的正多面体群剖分。最后，结合正多面体群的几何意义，利用 Matlab 的优越矩阵计算能力，实现正多面体群矩阵元素的自动化计算。

1 3 维正多面体的基础根系统

3 维正多面体可以由Schläfli 指标[3] $\{p,q\}$ 来简单表示,其中 p 表示正多面体由正 p 边形构成，q 表示正多面体的每个顶点处有 q 个正 p 边形。3 维欧氏空间里共有 5 种正多面体：正四面体{3,3}，正六面体{4,3}，正八面体{3,4}，正十二面体{5,3}，正二十面体{3,5}。

考虑正多面体 $\{p,q\}$ 上的反射群，记为 $[p,q]$，它是由一些反射构成的群。关于平面 P 的反射 Π 是一个线性变换：

$$\Pi(\vec{x})=\begin{cases}\vec{x},\ 当\ \vec{x}\in P\ 时,\\ -\vec{x},\ 当\ \vec{x}\in P^{\mathrm{T}}时,\end{cases}$$

其中 P^{T} 是平面 P 的正交空间。假设 $\vec{v}$ 是一个非零向量，可由该向量生成反射 $\Pi_{\vec{v}}(\vec{x})$：

$$\Pi_{\vec{v}}(\vec{x})=\vec{x}-2\frac{(\vec{x},\vec{v})}{(\vec{v},\vec{v})}\vec{v},$$

其中 $(\vec{x},\vec{v})$ 是向量 $\vec{x}$ 和 $\vec{v}$ 的内积。特别的，如果向量 $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 是平面 P 的单位法向量，则关于平面 P 的反射 $\Pi_{\vec{v}}$ 对应的反射矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1&v_2&v_3\end{bmatrix}$$

反射群 $[p,q]$ 是一个对称群，它的基础根系统[6]（fundamental root system）是一些向量的集合，这些向量生成的反射是反射群 $[p,q]$ 的生成子。假设 $\Delta_{[p,q]}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ 是反射群 $[p,q]$ 的基础根系统，则

$$D_{[p,q]}=\{\vec{\xi}\in\Re^3\mid(\vec{\xi},\vec{v}_k)\geq 0,\forall\vec{v}_k\in\Delta_{[p,q]}\}$$

是对应反射群 $[p,q]$ 的基本域（fundamental region）[7]。表 1 列出了 3 维正多面体的反射群 $[p,q]$ 及其基础根系统。

表 1 反射群 $[p,q]$ 的基础根系统，其中 $a=\frac{\sqrt{5}+1}{4},b=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Table 1 The fundamental root system of the reflection group, where $a=\frac{\sqrt{5}+1}{4},b=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

名称	Schläfli 指标	对称群	基础根系统 $\Delta_{[p,q]}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$	对称群的个数
正 4 面体	{3,3}	[3,3]	（1，-1，0） （0，1，-1） （-1，0，-1）	24
正 8 面体 正 6 面体	{3,4} {4,3}	[3,4]	（1，-1，0） （0，1，-1） （0，0，1）	48
正 20 面体 正 12 面体	{3,5} {5,3}	[3,5]	（a，-0.5，b） （-a，0.5，b） （0.5，b，-a）	120

2 基于万花筒原理具有正多面体对称性的球面 tiling 剖分

假设 $\Delta_{[p,q]}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ 是反射群 $[p,q]$ 的基础根系统，$\Pi_{\vec{v}_k}(k=1,2,3)$ 是由向量 $\vec{v}_k$ 生成的反射，则 $\{\Pi_{\vec{v}_1},\Pi_{\vec{v}_2},\Pi_{\vec{v}_3}\}$ 是对称群 $[p,q]$ 的生成子。对于基本域 $D_{[p,q]}$ 外的任意一点 $\vec{x}_0\in\Re^3$，下面的基础域算法给出了求解使得 $\vec{x}_N=\Gamma_N(\vec{x}_0)\in D_{[p,q]}$ 成立的反射变换 Γ_N 的方法。

步骤 1：令 $n=1$

步骤 2：对于 $k=1,2,3$ 做循环，如果 $(\vec{x}_{n-1},\vec{v}_k)<0$，则做一次反射：

$$\vec{x}_n=\Pi_{\vec{v}_k}(\vec{x}_{n-1})=\vec{x}_{n-1}-2\frac{(\vec{x}_{n-1},\vec{v}_k)}{(\vec{v}_k,\vec{v}_k)}\vec{v}_k,\ \Pi_n=\Pi_{\vec{v}_k},$$

并跳出循环；

步骤 3：当存在 $k\in\{1,2,3\}$ 使得 $(\vec{x}_n,\vec{v}_k)<0$ 时，$n=n+1$，并回到步骤 2；否则回到步骤 4；

步骤 4：假设 N 是步骤 2 重复的次数，并记

$\Gamma_N = \Pi_N \times \Pi_{N-1} \times \cdots \times \Pi_2 \times \Pi_1$，则

$$\vec{x}_N = \Gamma_N(\vec{x}_0) \in D_{[p,q]}。$$

根据反射次数 N 的奇偶性，在球面上分别用不同的颜色画出球面上的点。

上述算法的本质就是万花筒原理（kaleidoscopeprinciple）[8]，即连续地应用反射变换，最终把点映射到特定的区域。根据上述算法，图 1 中展示的分别是具有[3,3]、[3,4]和[3,5]对称性球面 tiling[9]图案。

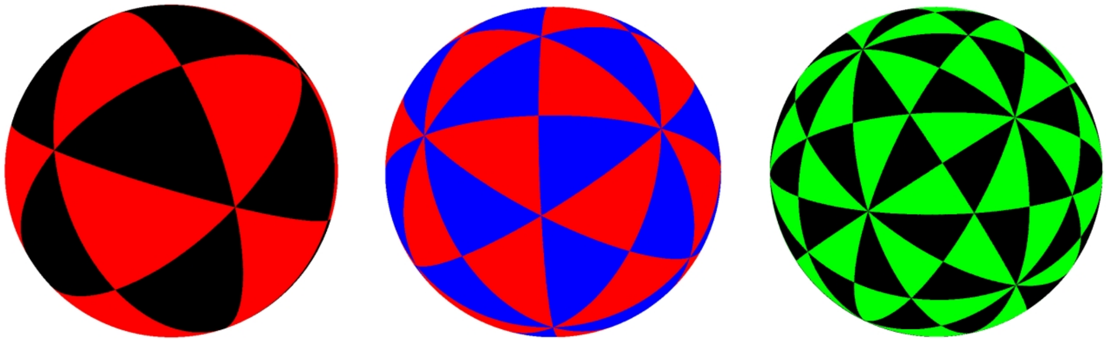

图 1 从左到右，具有[3,3],[3,4]和[3,5]对称性球面 tiling 图案

Fig.1 From left to right, there are spherical tiling patterns with [3,3], [3,4] and [3,5] symmetry.

3 基于万花筒原理正多面体对称性元素 Matlab 自动化计算

假设矩阵 $B_k\,(i=1,2,3)$ 是对应反射 $\Pi_{\vec{v}_k}\,(k=1,2,3)$ 的反射矩阵。只需在上述基础域算法中做适当的修改—记录每次反射对应的反射矩阵，就可以得到正多面体对称性元素及其个数。

步骤 2：对于 $k=1,2,3$ 做循环，如果 $(\vec{x}_{n-1},\vec{v}_k)<0$，则做一次反射：

$$\vec{x}_n = \Pi_{\vec{v}_k}(\vec{x}_{n-1}) = \vec{x}_{n-1} - 2\frac{(\vec{x}_{n-1},\vec{v}_k)}{(\vec{v}_k,\vec{v}_k)}\vec{v}_k,\ \Pi_n = \Pi_{\vec{v}_k},$$

记录这次反射后的反射矩阵 $A = A_n A$（其中 $A_n = B_k$），并跳出循环；

步骤 4：假设 N 是步骤 2 重复的次数，并记 $\Gamma_N = \Pi_N \times \Pi_{N-1} \times \cdots \times \Pi_2 \times \Pi_1$，则

$$\vec{x}_N = \Gamma_N(\vec{x}_0) \in D_{[p,q]},\quad A = A_N A_{N-1} \cdots A_2 A_1 E,$$

其中 $A_n\,(n=1,2,\cdots,N)$ 是第 n 次反射对应的反射矩阵。

通过比较对应于每点的反射矩阵，记录所有不同的反射矩阵，即记录了对应于正多面体中的所有对称性矩阵元素。Matlab 实验结果表明，对称群[3,3]、[3,4]和[3,5]的矩阵群元素分别有 24、48 和 120 个，充分说明上述算法的有效性。

参考文献：

[1] 张远达. 运动群[M].上海: 教育出版社,1980.

[2] Armstrong V E. Groups and symmetry[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.

[3] Coxeter HSM. Regular Polytopes[M]. Dover: New York, NY, USA, 1973.

[4] Mcmulle P, Schulte E. Abstract Regular Polytopes[M]. Cambridge:Cambridge University Press，2002.

[5] Rees E G. Notes on Geometry[M]. Springer: Berlin/Heidelberg, 1983.

[6] Humphreys JE, Bollobas B, Fulton W, Katok A, Kirwan F, Sarnak P, Simon B. Reflection Groups and Coxeter Groups [M]. Cambridge: Cambridge University Press，1992.

[7] Magnus W. Noeuclidean Tessellation and Their Groups [M]. New York:Academic Press，1974.

[8] Goodman. Alice through Looking Glass after Looking Glass: The Mathematics of Mirrors and Kaleidoscopes[J]. American Mathematical Monthly, 2004, 111(4): 281-298.

[9] Grünbaum B,ShephardGS.Tilings andPatterns [M]. W.H. Freeman, 1986.

[10] 陈杰. Matlab 宝典[M]. 北京: 电子工业出版社，2007.