

# 保守系统的混沌同步\*

## Chaotic Synchronization in Conservative Systems

陈光旨      王旭明      覃团发\*\*      李伟  
Chen Guangzhi      Wang Xuming      Qin Tuanfa      Li Wei

(广西大学物理系 南宁市西乡塘路 10号 530004)

(Dept. of Phys., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

**摘要** 发现保守系统相空间中的一个轨道囚禁区. 用闭环控制方法将系统引入囚禁区并在其内实现了同步.

**关键词** 保守系统 囚禁区 闭环控制同步

**Abstract** An area so called prison region in a conservative system phase space is found, in which the orbits is confined. We use the close-loop controlling method to direct the systems into this region and to achieve synchronization in it.

**Key words** conservative system, prison region, close-loop controlling synchronization

中图法分类号 O 414

传输和迁移控制法<sup>[1-3]</sup>是 Hubler, Jackson 等人利用开关函数将系统导入状态空间中自然存在的收敛区域以遏制混沌或进行目标瞄准. 对于前一目的, 由于控制目标限于状态空间的某一子集, 人们只能选择系统初值在传输区内而不能保证对系统的跟踪控制, 为克服这一不足, Jackson 和 Grosu 用闭环控制作了改进<sup>[4]</sup>, 增加了反馈作用, 从而能够引导系统到任何目标. 这种方法容易实现混沌同步.

耗散系统的混沌同步自 Pecora, Carroll<sup>[5,6]</sup>的开创性工作以来, 已有好多成功的方法<sup>[7-9]</sup>. 但目前尚未见有关保守系统混沌同步的报道. 保守系统的混沌控制的工作才刚刚开始<sup>[10]</sup>, 方法是在 Poincare 截面上用脉冲将轨道上的“当前”点引到某个“初值”点使系统形成不平滑闭合轨道的周期运动. 本文将用改进的闭环控制实现一个保守模型<sup>[11]</sup>的混沌同步. 保守系统与耗散系统的动力行为不同, 后文首先讨论这一点.

## 1 系统

Sprott<sup>[11]</sup>通过大量的计算搜索得到一个混沌的

保守系统  $\ddot{x} + \dot{x} - x^2 + B = 0$ , 其中  $0 \leq B \leq 0.05$ . 容易化为三维自治方程

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= x^2 - y - B\end{aligned}\quad (1)$$

系统的相体积的时间变化率等于方程的 Jacobian 矩阵的迹

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{Tr}J = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

显然这是一个保体积系统, 即保守系统. 保守系统与耗散系统不同, 后者因相体积的收缩而存在一个强烈的吸引域, 轨道受自身的约束, 即使系统自此区域外的一点开始演化, 轨道总会进入此区域形成奇怪吸引子. 而保守系统因其具有保体积性无吸引子, 轨道会访问相空间中的无穷远点, 同时由于轨道间的指数分离, 微小的差别会随轨道的发散而迅速放大, 故控制混沌或同步系统都是非常困难甚至不可能. 然而, 幸运的是我们对初值的搜索发现了相空间中有一个小小的区域, 初值落在其中轨道会被囚禁在此区域中. 姑且称作轨道的囚禁区. 必须说明的是它不同于耗散系统的吸引子, 耗散系统的轨道在远离吸引子的情况下, 由于吸引性, 最终会进入吸引子流域. 保守系统的初值一旦落在囚禁区外, 轨道会迅速发散. 图 1 是初值为 (0, 0, 0.22, 0, 0) 时相空间的轨道流形即囚禁

1997-11-04收稿.

\* 国家自然科学基金资助项目 (编号: 19562001)

\*\* 广西大学计算机与信息工程学院, 南宁, 530004 (College of Computer and Info. Eng., Guangxi Univ., Nanning, 530004.)

区. 实验表明除此流域外的任何点为初值的轨道都将迅速发散. 图 2 即属这种情况 (初值为  $(0, 0, 0.02, 0, 0)$ ), 可见图 1 中由流形所包围的轨道不访问区也是轨道迅速发散的区域. 有实际意义的系统应当是囚禁区内的运动. 然而, 一个实际系统有可能因某种作用而在囚禁区外运动. 轨道的发散可能会造成某种灾难性后果. 基于这种考虑, 我们的同步方案是设法把系统引入囚禁区再实现同步.

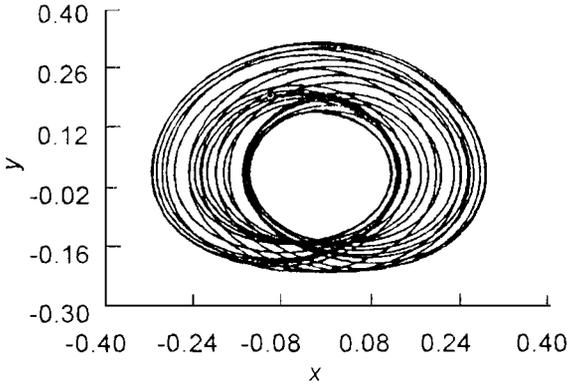


图 1 Fig. 1

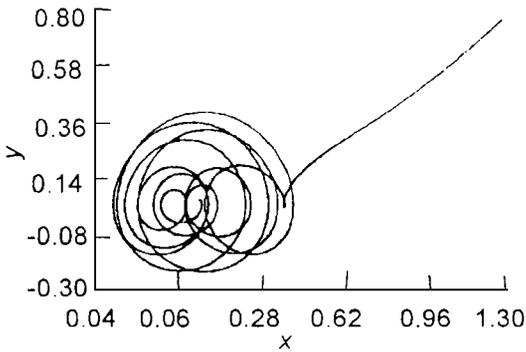


图 2 Fig. 2

## 2 同步方法

若一系统由 ODE 描述其动力学

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (x \in R^n) \quad (3)$$

我们在系统上施加闭环控制

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) + C(g, t) [g(t) - x(t)] \quad (4)$$

将系统引导到目标动力学  $g(t)$ , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - g(t)] = 0 \quad (5)$$

方程 (4) 中的  $C(g, t) [g(t) - x(t)]$  就是闭环控制项, 我们取

$$C(g, t) = \text{sign}(g) Tg \quad (6)$$

其中  $T$  为控制变量, 这里令其为正常数,  $\text{sign}$  为符号函数, 引进此项的目的是连续不断地以负反馈作用影响系统, 因为在囚禁区外, 必须用连续的强作用去遏

制轨道的发散运动, 最终将其引进囚禁区并实现同步. 否则, 即使短暂的控制间歇或正反馈, 轨道可能已跑得很远了. 令

$$u(t) = x(t) - g(t) \quad (7)$$

若

$$\frac{du}{dt} = F'(u, x, g) \quad (8)$$

其中  $F'$  为两系统之差的矢量函数.  $u(t)$  在方程 (8) 的 Jacobian 的特征值有负的实部的条件下是渐近稳定的. 对于三维系统, 下面的 Routh-Hurwitz 稳定性判据正是这一结果的充分必要条件

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \\ a_3 &> 0 \\ a_1 a_2 - a_3 &> 0 \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $a_1, a_2, a_3$  是由 Jacobian 所确定的特征多项式  $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$  的特征值系数.

明显地, 我们之所以能遏制囚禁区外轨道的发散运动而将其引入囚禁内, 其实质是把耗散系统 (3) 通过闭环控制暂时转变为保守系统. 根据方程 (4) 和方程 (6) 有

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{Tr} J = - \sum_i \text{sign}(g_i) T g_i < 0 \quad (10)$$

其中  $g_i$  是目标系统的第  $i$  个分量. 新系统的相体积收缩.

情形 1: 倘若两个待同步的系统均在囚禁区内, 同步是容易实现的, 这跟耗散系统的同步并无差别. 如果待同步系统在囚禁区外而目标系统在囚禁区内, 这时同步的实质就是区外系统瞄准区内系统. 同步过程是先将系统引入囚禁区随后与目标系统同步. 我们的控制方程为

$$\frac{dx'}{dt} = y' + T \text{sign}(x') x' (x' - x) \quad (11)$$

$$\frac{dy'}{dt} = z' + T \text{sign}(y') y' (y' - y)$$

$$\frac{dz'}{dt} = x'^2 - y' - 0.025 + T \text{sign}(z') z' (z' - z)$$

令系统  $\{x', y', z'\}$  在囚禁区内自由运动. 即

$$\frac{dx'}{dt} = y' \quad (12)$$

$$\frac{dy'}{dt} = z'$$

$$\frac{dz'}{dt} = x'^2 - y' - 0.025$$

对方程 (11) 在目标系统的某一点  $(x', y', z')$  线性化得到方程 (8) 的 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} -T \text{sign}(x') x' & 1 & 0 \\ 0 & -T \text{sign}(y') y' & 1 \\ 2x' & -1 & -T \text{sign}(z') z' \end{pmatrix} \quad (13)$$

根据条件 (9), 在其不小于 2.0 的情况下  $T =$

$\frac{1}{|x'| + |y'| + |z'|}$  能够保证两系统之差  $u(t)$  向零收敛. 为保持对系统连续不断地施以强迫作用,  $T$  取为正常数. 即可粗略得  $T > 2.0$ . 需要注意的是它的值不能太大, 大则不能进入囚禁区或有可能入而复出.

图 3 是在  $T = 3.6$  时囚禁区外的系统自  $(0.0, 1.0, 0.0)$  一点被导入囚禁区并与区内初值为  $(0.0, 0.14, 0.0)$  的系统同步. 图 4 是同步过程中  $y' - y$  的时间变化曲线.

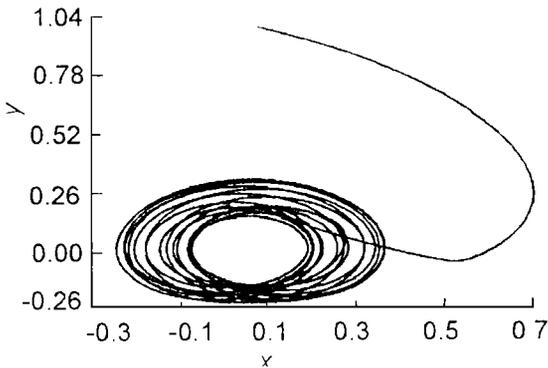


图 3 Fig. 3

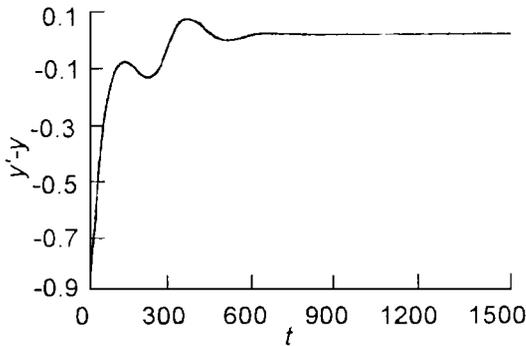


图 4 Fig. 4

情形 2 如果两个系统都在囚禁区外演化, 虽然用我们的控制能够使得两系统在离囚禁区不远的初值条件下近似同步, 甚至在很短的时间内能使两系统的差达到  $1.0 \times 10^{-12}$  的接近程度, 但由于不能有效地抑制轨道的发散运动, 伴着轨道的发散, 如此小的差别会迅速放大, 以致囚禁区外的系统永远无法同步.

实质上, 囚禁区外的系统是不可控制和不能同步的. 而对于实际系统这样的情况是可能发生的, 因此将系统引导到囚禁区是有实际意义的. 我们的方法是在其中一系统上施加控制, 驱使它向另一系统接近, 与此同时, 在后一系统上施加控制使之瞄准囚禁区内

的某一点. 这点是所期望的系统初值点或任意一点, 其目的是把系统引入囚禁区. 具体作法是在系统  $\{x, y, z\}$  上加闭环控制 (与方程 (11) 相同), 同时使系统  $\{x', y', z'\}$  瞄准囚禁区内的一点  $(a, b, c)$

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= y' + U(a - x') \\ \frac{dy'}{dt} &= z' + U(b - y') \\ \frac{dz'}{dt} &= x'^2 - y' - 0.025 + U(c - z') \end{aligned} \quad (14)$$

一旦系统达到目标, 就令其自由运动.

为保证完成同步和把系统引入囚禁区, 必须同时保证方程 (11) 和方程 (14) 分别针对两个目标的 Jacobian 特征值有负的实部. 方程 (14) 的 Jacobian 为

$$\begin{pmatrix} -U & 1 & 0 \\ 0 & -U & 1 \\ 2a & -1 & -U \end{pmatrix} \quad (15)$$

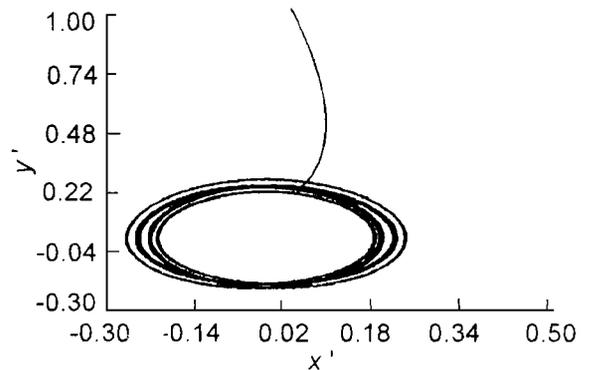
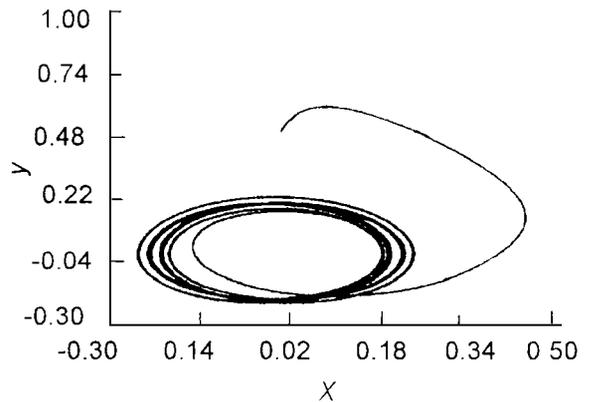


图 5 Fig. 5

根据方程 (9),  $U$  满足的关系为:  $U > 0; U + 0.25U > 0.25; U + U - 2T$  的范围与情形 1 时的相同,  $U > 1.1$ . 系统  $\{x, y, z\}, \{x', y', z'\}$  的初值和目标  $(a, b, c)$  分别取为  $(0.0, 0.49, 0.0), (0.0, 1.2, 0.0)$  和  $(0.0, 0.21, 0.01)$ . 取  $T = 3.6, U = 4.6$ , 图 5(a), 图 5(b) 分

别是系统  $\{x, y, z\}, \{x', y', z'\}$  被引入囚禁区的过程. 这个过程实质上是负反馈将后一个系统“拉向”囚禁区, 同时前一个系统被“拉向”后一个系统, 同步过程即为图 6 所示.

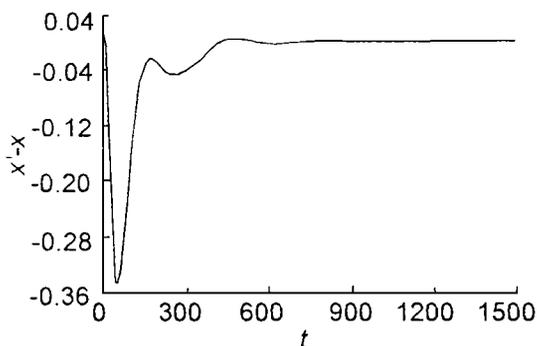


图 6 Fig. 6

### 3 结语

由于保守系统不存在吸引子只存在轨道的囚禁区, 其外的轨道迅速发散, 因此保守系统的混沌同步有其特别的意义. 而真正的同步在囚禁区内才能完成. 我们用闭环控制实现了将系统引入囚禁区并与其内的另一系统同步; 也实现了在一系统上加闭环控制, 同时在另一系统上加负反馈作用, 以囚禁区内的

某一点为目标, 将两系统导入囚禁区使之在其内同步. 对一些实际系统, 目标点是我们所期望的初值点, 因而有实际意义. 这是我们所作的一点尝试性工作, 相信将有更好的方法出现.

### 参考文献

- 1 Hubler, Helv. Phys. Acta, 1989, 62 343.
- 2 Jackson E A, Hubler A. Physica, 1990, D40 407.
- 3 Jackson E A, Hubler A. Physica, 1991, D50 34.
- 4 Jackson E A, Grosu I. Physica, 1995, D85 1.
- 5 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. Phys Rev Lett, 1990 64 821.
- 6 Pecora L M, Carroll T L. Driving systems with chaotic signals. Phys Rev, 1991, A44 2574.
- 7 Roy R, Scott Thornburg K Jr. Experimental synchronization of chaotic lasers. Phys Rev Lett, 1994, 72 2009.
- 8 Ernst U, Pawelzik K, Geisel T. Synchronization induced by temporal delays. Phys Rev Lett, 1995, 74 1570.
- 9 Kocarev L, Parlitz U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication. Phys Rev Lett, 1995, 74 5028.
- 10 Liu Z H, Chen Sh G. Control conservative system. Chin Phys Lett, 1997, 16 816.
- 11 Sprott J C. Phys Rev, 1994, E50 647.

(责任编辑: 邓大玉)

## 美国面向 21 世纪科技发展重点与战略目标 (基础研究和生物技术)

在基础研究方面, 1997 年 4 月公布的白宫致国会的《塑造 21 世纪的科学与技术》报告中, 确定了基础研究五大“推动领域”: (1) 宇宙、太阳系及生命的起源. 寻找关于银河系、行星、恒星以及生命诞生和发展的基础问题的答案; (2) 了解地球系统, 监测、了解、减少甚至预测由于自然及人类引起的全球变化, 研究如何保持地球生态系统的健康和长期可居住性; (3) 材料研究. 为建设更加繁荣的未来, 设计新型材料; (4) 基因组研究. 为了人类的健康和疾病防治, 进行包括人类基因工程的从分子到医学的研究; (5) 人类学习和潜力. 研究人类如何学习、处理信息, 并利用信念解决问题

在生物技术的发展上, 美国国家科技委员会《21 世纪生物技术新的方向》蓝皮报告指出生物技术研究头等优先的任务是: 进一步旨在发生在发现、阐明、改良和控制各种用于生物技术应用的陆地和海洋生物的遗传、生化制品和过程的研究; 应用现代生物技术手段解决农业、环境和制造工艺方面的问题, 以促进新产品的开发、旧产品的改良和新工艺、新测试方法的开发; 加强和提高设施、设备、数据库和人才资源等的建设, 以保证未来生物技术发展的活力. 生物技术发展最为迅速的 4 个研究方向是: (1) 农业生物技术; (2) 环境生物技术; (3) 生物处理方法; (4) 海洋生物技术和水产养殖.

(摘自中国科学院《科学发展报告》, 1997)