文章编号:1004-5694(2006)01-0134-04

带有非线性局部化反应源项的抛物方程组的爆破估计*

李玲[1,2], 胡学刚[1]

(1. 重庆邮电学院 应用数学研究所, 重庆 400065; 2. 西南大学 数学与财经学院, 重庆 400715)

摘 要:讨论了一类带局部化非线性反应项的扩散方程组的爆破估计问题。在一些合理的假设条件下,对于初值问题,得到了解的爆破条件和爆破速率;对于相应的第一初边值问题,不仅建立了解的爆破估计,而且还获得了边界层估计。

关键词:抛物方程组;爆破;局部化源;边界层

中图分类号:O175.29 文献标识码:A

0 引 言

考虑如下的非线性抛物方程组

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{p_1}(x_0(t),t)v^{q_1}(x_0(t),t), \\ v_t = \Delta v + u^{p_2}(x_0(t),t)v^{q_2}(x_0(t),t). \end{cases}$$
$$(x,t) \in \Omega \times (0,T). \tag{1}$$

这里 $p_i, q_i (i=1,2)$ 为非负常数, $p_2 > 0, q_1 > 0, p_2 > p_1 - 1$ 并且 $q_1 > q_2 - 1, x_0: R^+ \to \Omega$ 是 Hölder 连续函数。

(1) 式描述了某些动力系统发生在某一点或特定曲线上的物理现象。例如,结构缺陷对催化表面所造成的影响可以模拟为类似的数学模型[1]。许多学者研究了如下形式的单个方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u(x_0(t),t)), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{2}$$

当 $\Omega = R^N$ 时,对于初值问题(2),如果初值 $u_0 \geqslant C > 0$ 时,Chadam 等人证明了它的解必在有限时刻爆破[2];如果 $u_0 \geqslant 0$ 且 $u_0 \not\equiv 0$,Souplet 给出了该问题的解完全爆破的结论,并获得了一致爆破速率[3]。当 Ω 为 R^N 中的具有光滑边界的有界区域时,对于(2)式相应的第一初边值问题,许多学者对解的爆破性质进行了深入的研究[2-6],并得到了一些很好的结果,如 Souplet 在文献[3]和文献[5]中,不仅建立了爆破速率,而且还讨论了它们的边界层情况。而对于方程组的情形,Wang 讨论了正解的有限时刻爆破问题,得到了该问题解在有限时刻爆破的充分条件[7]。最近,Wang 就(1)式中 $x_0(t)$ 恒为 Ω 中的一个固定点 x_0,Ω 为 R^N 中的具有光滑边界的有界区域的情形,讨论了解的一致爆破模式[8]。然而,据我们所知,对于 $x_0: R^+ \to \Omega$ 是 Hölder 连续函数的情形,其解的一致爆破估计与边界层至今尚未得到相应的结果。

我们受文献[3]和[8]的启发,并将其方法进行改进,研究了(1)式对应的初值问题和初边值问题解的爆破估计与边界层。当 $\Omega = R^N$ 时,在初始条件

$$u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), x \in R^N. \tag{3}$$

(3)式问题中,假设 $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 都是非负连续的有界函数。我们给出了问题(1)和(3)解的爆破条件和爆破速率。

当 Ω 为 R^N 中的具有光滑边界的有界区域时,在初边值条件

$$\begin{cases} u = 0, v = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{4}$$

(4)式问题中,$u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 都是 $\overline{\Omega}$ 上的连续非负函数且在边界 $\partial\Omega$ 上为 0。对于问题(1)和(4),我们也建立了解的爆破条件,并给出了边界层估计。由此推广了文献[3]和[8]的结果。

在本文中,我们为了叙述方便起见,在不致引起混淆的情况下,用 C 表示常数,令

$$\alpha = \frac{q_1 - q_2 + 1}{p_2 q_1 - p_1 q_2 + p_1 + q_2 - 1},$$

$$\beta = \frac{p_2 - p_1 + 1}{p_2 q_1 - p_1 q_2 + p_1 + q_2 - 1}$$

* 收稿日期:2005-07-20 修订日期:2005-12-21
基金项目:重庆市高校优秀中青年骨干教师资助基金(D2005-37)和重庆邮电学院青年教师基金项目(A2005-24)
作者简介:李玲(1964-),女,重庆市人,西南大学在职硕士研究生,讲师,主要从事非线性分析研究。

1　初值问题的一致爆破估计

使用文献[9]中的方法,容易得到问题(1)式和(3)式非负解的局部存在性,而且当$(u_0(x),v_0(x))\neq(0,0)$时,存在$T_0\in(0,T)$,使得对任意的$(x,t)\in R^N\times(T_0,T)$有$(u(x,t),v(x,t))>0$。定义

$$\begin{cases}\underline{u}(t)=\int_0^t u^{p_1}(x_0(s),s)v^{q_1}(x_0(s),s)\mathrm{d}s,\bar{u}=\underline{u}+C_0,\\ \underline{v}(t)=\int_0^t u^{p_2}(x_0(s),s)v^{q_2}(x_0(s),s)\mathrm{d}s,\bar{v}=\underline{v}+C_0,\end{cases}\qquad(5)$$

其中,$C_0=\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty$,并假定$x_0:R^+\to R^N$是Hölder连续函数。由于

$$\underline{u}_t-\Delta\underline{u}=\bar{u}_t-\Delta\bar{u}=u^{p_1}(x_0(t),t)v^{q_1}(x_0(t),t)=u_t-\Delta u,$$

$$\underline{v}_t-\Delta\underline{v}=\bar{v}_t-\Delta\bar{v}=u^{p_2}(x_0(t),t)v^{q_2}(x_0(t),t)=v_t-\Delta v,$$

且

$$\underline{u}(x,0)=0\leqslant u_0(x)\leqslant\bar{u}(x,0),$$
$$\underline{v}(x,0)=0\leqslant v_0(x)\leqslant\bar{v}(x,0).$$

根据极大值原理,只要问题(1)和(3)的解存在,必有$\underline{u}\leqslant u\leqslant\bar{u}$和$\underline{v}\leqslant v\leqslant\bar{v}$,且$\underline{u}(t)\leqslant u(x_0(t),t)\leqslant\bar{u}(t)$和$\underline{v}(t)\leqslant v(x_0(t),t)\leqslant\bar{v}(t)$。

为了得到初值问题(1)和(3)解的爆破估计,引入下列引理:

引理1　存在常数$C_i(i=1,2,,3,4)$,满足

$$\underline{v}^{q_1-q_2+1}\leqslant C_1\underline{u}^{p_2-p_1+1},$$
$$\underline{u}^{p_2-p_1+1}\leqslant C_2\underline{v}^{q_1-q_2+1},$$
$$t\in(T_0,T);$$
$$\bar{v}^{q_1-q_2+1}\leqslant C_3\bar{u}^{p_2-p_1+1},$$
$$\bar{u}^{p_2-p_1+1}\leqslant C_4\bar{v}^{q_1-q_2+1},$$
$$t\in(T_0,T);$$

证明　下面给出第一个不等式的证明,其余不等式可类似证明。令

$$J(t)=\bar{C}\frac{\underline{u}^{p_2-p_1+1}}{p_2-p_1+1}-\frac{\underline{v}^{q_1-q_2+1}}{q_1-q_2+1}$$

其中

$$\bar{C}\geqslant\max\left\{\left(\frac{\underline{u}(T_0)+C_0}{\underline{u}(T_0)}\right)^{p_2}\left(\frac{\underline{v}(T_0)+C_0}{\underline{v}(T_0)}\right)^{q_2},\left(\frac{p_2-p_1+1}{q_1-q_2+1}\right)\frac{\underline{v}^{q_1-q_2+1}(T_0)}{\underline{u}^{p_2-p_1+1}(T_0)}\right\}$$

因为$\underline{u}_t=u^{p_1}(x_0(t),t)v^{q_1}(x_0(t),t)\geqslant\underline{u}^{p_1}\underline{v}^{q_1}$且$\underline{v}_t=\bar{v}_t\leqslant\bar{u}^{p_2}\bar{v}^{q_2}=(\underline{u}+C_0)^{p_2}(\underline{v}+C_0)^{q_2}$,注意到$\underline{u}$和$\underline{v}$都是关于$t$的不减函数,因此容易得到

$$J'(t)=\bar{C}\underline{u}^{p_2-p_1}\underline{u}_t-\underline{v}^{q_1-q_2}\underline{v}_t\geqslant\bar{C}\underline{u}^{p_2}\underline{v}^{q_1}\left(1-\frac{1}{\bar{C}}\left(\frac{\underline{u}+C_0}{\underline{u}}\right)^{p_2}\left(\frac{\underline{v}+C_0}{\underline{v}}\right)^{q_2}\right)\geqslant0,$$
$$t\in(T_0,T),$$

$$J(T_0)=\bar{C}\frac{\underline{u}^{p_2-p_1+1}(T_0)}{p_2-p_1+1}-\frac{\underline{v}^{q_1-q_2+1}(T_0)}{q_1-q_2+1}\geqslant0\qquad(6)$$

因此,对任意的$t\in(T_0,T)$可得$J(t)\geqslant0$成立。即$\underline{v}^{q_1-q_2+1}\leqslant C_1\underline{u}^{p_2-p_1+1}$成立。引理1得证。

现在讨论问题(1)和(3)解的爆破条件。

定理1　如果$u_0(x),v_0(x)$,都是非负有界的且不恒为0的连续函数,那么初值问题(1)和(3)的解(u,v)一定在有限时刻爆破。

证明　由引理1,有$\underline{u}_t\geqslant\underline{u}^{p_1}\underline{v}^{q_1}\geqslant C\underline{u}^{(p_2q_1-p_1q_2+p_1+q_1)/(q_1-q_2+1)}$,从而$(-\alpha)(\underline{u}^{-1/\alpha})_t\geqslant C,t\in(T_0,T)$。将此不等式两边同时在$[T_0,t]$上积分,有

$$\alpha(\underline{u}^{-1/\alpha}(T_0)-\underline{u}^{-1/\alpha}(t))\geqslant C(t-T_0)$$

于是

$$\underline{u}(t)\geqslant\left(\frac{\alpha}{\alpha\underline{u}^{-1/\alpha}(T_0)-C(t-T_0)}\right)^{\alpha}$$

令$T^*=T_0+\alpha\underline{u}^{-1/\alpha}(T_0)/C$,则有$\lim\limits_{t\to T^{*-0}}\underline{u}(t)=+\infty$。所以$\underline{u}$在有限时刻爆破。根据引理1知,$\underline{v}$也在有限时刻爆破。而$\underline{u}\leqslant u$和$\underline{v}\leqslant v$,故问题(1)和(3)的解$(u,v)$一定在有限时刻爆破。定理1得证。

下面假定(u,v)在有限时刻爆破,且用T^*表示它的最大存在时间。

引理2　存在常数$C_i(i=5,6,7,8)$,满足

$$C_5(T^*-t)^{-\alpha}\leqslant\underline{u}\leqslant C_6(T^*-t)^{-\alpha},(t\to T^{*-}),\qquad(7)$$

$$C_7(T^*-t)^{-\beta}\leqslant\underline{v}\leqslant C_8(T^*-t)^{-\beta},(t\to T^{*-}),\qquad(8)$$

证明　从定理1的证明,我们有$(-\alpha)(\underline{u}^{-1/\alpha})_t\geqslant C,t\in(T_0,T^*)$,将不等式两边同时在$[t,T^*)$积分,得

$$\alpha\underline{u}^{-1/\alpha}(t)\geqslant\alpha(\underline{u}^{-1/\alpha}(t)-\underline{u}^{-1/\alpha}(T^*))\geqslant C(T^*-t)$$

因此,$\underline{u}(t)\leqslant C(T^*-t)^{-\alpha}$. 另一方面,由引理1,有

$$\underline{u}_t=\bar{u}_t\leqslant\bar{u}^{p_1}\bar{v}^{q_1}=(\underline{u}+C_0)^{p_1}(\underline{v}+C_0)^{q_1}\leqslant C\underline{u}^{(q_1p_2-p_1q_2+p_1+q_1)/(q_1-q_2+1)},$$
$$(t\to T^{*-}),$$

即$(-\alpha)(\underline{u}^{-1/\alpha})_t\leqslant C$,$(t\to T^{*-})$。由此容易得到$\underline{u}(t)\geqslant C_5(T^*-t)^{-\alpha},(t\to T^{*-})$。即(7)式得证,同理可证(8)式。

由于$(\underline{u},\underline{v})\leqslant(u,v)\leqslant(\bar{u},\bar{v})\leqslant(\underline{u}+C_0,\underline{v}+$

C_0)，利用引理 2，我们容易得到问题(1) 和(3) 解的爆破速率。

定理 2　设(u,v)是问题(1) 和(3) 的一个古典解，那么存在常数 $C_i(i=9,10,11,12)$，满足

$$C_9(T^*-t)^{-\alpha}\leqslant u\leqslant C_{10}(T^*-t)^{-\alpha},$$
$$x\in R^N,t\to T^{*-},$$
$$C_{11}(T^*-t)^{-\beta}\leqslant v\leqslant C_{12}(T^*-t)^{-\beta},$$
$$x\in R^N,t\to T^{*-}$$

2　第一初边值问题的爆破估计

现在进一步假定 $p_1+q_1>1,p_2+q_2>1$。利用 Shoulder 不动点定理可以证明初边值问题(1) 式和(4) 式在 $\Omega\times(0,T)$ 上存在古典解(u,v)。当 $T<+\infty$，容易发现 $\lim\limits_{t\to T^*}\max_{\Omega}u(x,t)=+\infty$，$\lim\limits_{t\to T^*}\max_{\Omega}v(x,t)=+\infty$。

定理 3　设 $x_0:R^+\to\Omega$ 是 Hölder 连续函数，$\varphi\in C(\bar{\Omega}),\varphi|_{\partial\Omega}=0,\varphi\geqslant0,\varphi\neq0,u_0=\lambda\varphi,v_0=\mu\varphi,(\lambda,\mu>0)$，则存在正数 $\lambda(\varphi)>0$，当$\lambda,\mu>\lambda(\varphi)$时，初边值问题(1) 和(4) 解$(u,v)$ 在有限时刻 T^* 爆破。

证明　设函数 $z(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to T^*}z(t)=+\infty$，构造变量分离形式下的解$(z(t)w(x),z(t)w(x))$，证明类似于文献[5]，这里从略。

假设问题(1) 和(4) 的解 在有限时刻 T^* 爆破，并令

$$G_1(t)=\int_0^t u^{p_1}(x_0(s),s)v^{q_1}(x_0(s),s)\mathrm{d}s,$$
$$H_1(t)=\int_0^t G_1(s)\mathrm{d}s$$
$$G_2(t)=\int_0^t u^{p_2}(x_0(s),s)v^{q_2}(x_0(s),s)\mathrm{d}s,$$
$$H_2(t)=\int_0^t G_2(s)\mathrm{d}s$$

若$\lim_{t\to T^*}w_1(t)/w_2(t)=1$，则记为 $w_1\sim w_2(t\to T^*)$。为了给出问题(1) 和(4) 的解(u,v) 的爆破估计。类似于文献[5] 的方法，可以得到如下的引理。

引理 3　设(u,v) 是问题(1) 和(4) 在 $\Omega\times(0,T^*)$ 内的古典解，则

$$\lim_{t\to T^*}\frac{u(x,t)}{G_1(t)}=\lim_{t\to T^*}\frac{\|u(t)\|_\infty}{G_1(t)}=1$$
$$\lim_{t\to T^*}\frac{v(x,t)}{G_2(t)}=\lim_{t\to T^*}\frac{\|v(t)\|_\infty}{G_2(t)}=1$$

在 Ω 的某个紧子集上一致成立。

定理 4　设(u,v) 是问题(1) 和(4) 在 $\Omega\times(0,T^*)$ 内的古典解，则

$$\lim_{t\to T^*}(T^*-t)^{\alpha}u(x,t)=(\frac{1}{\alpha}(\frac{\alpha}{\beta})^{q_1/(q_1-q_2+1)})^{-\alpha};$$
$$\lim_{t\to T^*}(T^*-t)^{\beta}v(x,t)=(\frac{1}{\beta}(\frac{\beta}{\alpha})^{p_2/(p_2-p_1+1)})^{-\beta}$$

在 Ω 的某个紧子集上也一致成立。

证明　因为 x_0 是 Hölder 连续函数，且当 $t\in[0,T^*)$，存在 Ω 的某个紧子集 K，有 $x_0\in K$，因此根据引理 3，有

$$u(x_0(t),t)G_1(t),v(x_0(t),t)\sim G_2(t),(t\to T^*)$$

所以，$\dfrac{G_1^{p_2-p_1+1}}{p_2-p_2+1}\sim\dfrac{G_2^{q_1-q_2+1}}{q_1-q_2+1},(t\to T^*)$，从而，

$$(G_1^{-1/\alpha})_t\sim-\frac{1}{\alpha}(\frac{q_1-q_2+1}{p_2-p_1+1})^{\frac{q_1}{q_1-q_2+1}},$$
$$(G_2^{-1/\beta})_t\sim-\frac{1}{\beta}(\frac{p_2-p_1+1)}{q_1-q_2+1})^{\frac{p_2}{p_2-p_1+1}},$$
$$(t\to T^*)$$

从 t 到 T^* 积分，得

$$G_1(t)\sim(\frac{1}{\alpha}(\frac{\alpha}{\beta})^{q_1/(q_1-q_2+1)})^{-\alpha}(T^*-t)^{-\alpha},$$
$$G_2(t)\sim(\frac{1}{\beta}(\frac{\beta}{\alpha})^{p_2/(p_2-p_1+1)})^{-\beta}(T^*-t)^{-\beta},$$
$$(t\to T^*)$$

于是，再次使用引理 3，有

$$u(x,t)\sim(\frac{1}{\alpha}(\frac{\alpha}{\beta})^{q_1/(q_1-q_2+1)})^{-\alpha}(T^*-t)^{-\alpha},$$
$$v(x,t)\sim(\frac{1}{\beta}(\frac{\beta}{\alpha})^{p_2/(p_2-p_1+1)})^{-\beta}(T^*-t)^{-\beta},$$
$$(t\to T^*)$$

在 Ω 的某个紧子集上一致成立。定理 4 得证。

3　第一初边值问题的边界层估计

问题(1) 和(4) 的解(u,v) 在全空间区域 Ω 爆破，而(u,v) 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 却为 0。因此有必要讨论边界层情况。令 $d(x)=\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$。使用与文献[3] 类似的方法，可以得到如下引理。

引理 4　设(u,v) 是问题(1) 和(4) 在 $\Omega\times(0,T^*)$ 内的古典解，则对任意的正数 $A>0$，总存在常数 $C_{14}\geqslant C_{13}>0,C_{16}\geqslant C_{15}>0$ 和 $t_0\in(0,T^*)$ 使得对于满足 $d(x)\leqslant A\sqrt{T^*-t}$ 的所有$(x,t)\in\Omega\times[t_0,T^*)$，都有

$$C_{13}\frac{d(x)}{\sqrt{T^*-t}}G_1(t)\leqslant u(x,t)\leqslant C_{14}\frac{d(x)}{\sqrt{T^*-t}}G_1(t)$$
$$C_{15}\frac{d(x)}{\sqrt{T^*-t}}G_2(t)\leqslant v(x,t)\leqslant C_{16}\frac{d(x)}{\sqrt{T^*-t}}G_2(t)$$

利用引理4,容易证明如下定理。

定理5 设(u,v)是问题(1)和(4)在$\Omega\times(0,T^*)$内的古典解,则对任意的正数$A>0$,总存在常数$C_{18}\geqslant C_{17}>0, C_{20}\geqslant C_{19}>0$和$t_0\in(0,T^*)$使得对于满足$d(x)\leqslant A\sqrt{T^*-t}$的所有$(x,t)\in\Omega\times[t_0,T^*)$,都有

$$C_{17}\frac{d(x)}{\sqrt{T^*-t}}\|u(t)\|_\infty\leqslant$$

$$u(x,t)\leqslant C_{18}\frac{d(x)}{\sqrt{T^*-t}}\|u(t)\|_\infty$$

$$C_{19}\frac{d(x)}{\sqrt{T^*-t}}\|v(t)\|_\infty\leqslant$$

$$v(x,t)\leqslant C_{20}\frac{d(x)}{\sqrt{T^*-t}}\|v(t)\|_\infty$$

注 利用定理5立即可得问题(1)和(4)的解(u,v)的边界层的阶至少是$\sqrt{T^*-t}$,所以,当$t\rightarrow T^*$,$\frac{d(x)}{\sqrt{T^*-t}}\rightarrow 0$时,有$\frac{u(x,t)}{\|u(t)\|_\infty}\rightarrow 0$,$\frac{v(x,t)}{\|v(t)\|_\infty}\rightarrow 0$。

参考文献:

[1] ORLOEVA P, POSSI J. local structures in chemical reactions with heterogeneous catalysis[J], J. Chem. Phys., 1972,56:43-97.

[2] CHADAM J M,PEIECE A. and YIN H M. The blow-up property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reactions[J]. J. Math. Anal. 1992, 169: 313-328.

[3] SOUPLET P. Uniform blow－up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source[J], J. Differential Equations,1999, 153: 374-406.

[4] CANNON J R, YIN H M. A class of nonlinear non-classical parabolic equations[J], J. Differential Equations 1989 , 79: 266-288.

[5] SOUPLET P. Blow up in nonlocal reaction-diffusion equation[J]. SIAM J. Math. Anal., 1998, 29 (6): 1301-1334.

[6] LIN Z G,XIE C H,WANG M X. Blow-up estimates of solutions to semilinear heat equations with nonlinear boundary condition [J]. Mathematica Applicata, 1998, 11(1): 96-100.

[7] PEDERSON M, LIN G Z. Coupled diffusion systems with localized nonlinear reactions [J]. Computer and Math with Appl, 2001, 42: 807-816.

[8] 王明新,李慧玲,带有非线性局部化反应源项的抛物型方程组的一致爆破模式与边界层[J].中国科学,A辑,2004, 34(5):537-548.

[9] ESCOBEDO M,HERRERO M A. Boundedness and blow up for a semilinear reaction－diffusion system[J]. J. Differential Equations 1991, 89: 176-202.

(责任编辑:龙能芬)

Blow-up estimates of nonnegative solutions to a parabolic system with localized nonlinear reactions

LI Ling[1,2], HU Xue-gang[1]

(1. *Chongqing University of Posts and Telecommunications*, *Chongqing* 400065, *P. R. China*;

2. *College of Mathematics-Finance of SouthWest China Normal University*, *Chongqing* 400715, *P. R. China*)

Abstract: This paper deals with blow-up estimates of the nonnegative solutions to a parabolic system with localized nonlinear reactions. Under some reasonable conditions, for the Cauchy problem, we give the blow-up condition and blow-up rate; for the first initial-boundary problem, besides establishing the blow-up rates, we obtain the size of the boundary layer.

Key words: Diffusion system; blow－up; localized source; boundary layer