

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2014.04.011

基于观测器的 LMI 振动控制算法

王露健,周星德,秦飞马,张翔,李勇直

(河海大学土木与交通学院,江苏南京 210098)

摘要:针对基于观测器的 LMI 控制器设计中一个线性矩阵不等式中出现双变量的问题,提出一种赋初值迭代求解方法。考虑到双变量中一个为正定矩阵变量、一个为标量的特点,为了保证迭代收敛性和满足矩阵正定的要求,把正定矩阵变量作为初值赋予对象。仿真分析发现所设计的控制器仅能保证控制趋势,达不到预期控制效果,为此提出了调节因子的概念。最后,以 3 层基准建筑物为例进行仿真分析,结果表明该方法是可行的。

关键词:线性矩阵不等式;观测器;调节因子;振动控制

中图分类号:TU311.3 文献标志码:A 文章编号:1000-1980(2014)04-0342-04

Observer-based LMI vibration control algorithm

WANG Lujian, ZHOU Xingde, QIN Feima, ZHANG Xiang, LI Yongzhi

(College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In the design of an observer-based LMI (linear matrix inequality) controller, bivariate values appear in one linear matrix inequality. To solve this problem, we propose an initial value-iteration method in this paper. Of the bivariate values, one is a positive definite matrix variable and the other is a scalar. Considering these two characteristics, we take the positive definite matrix variable as the initial value, in order to ensure the astringency of the iteration and to meet the requirements of positive definite matrices. Simulation analysis shows that the designed controller can guarantee the control trend, which was far from the expected control result. We subsequently put forward the concept of a regulatory factor. As a case study, the simulation analysis of a three-storey benchmark building shows that the proposed method is feasible.

Key words: linear matrix inequality (LMI); observer; regulatory factor; vibration control

振动主动控制中的系统模型只是实际物理系统的一个近似,模型误差存在必然会降低控制系统的功能;由于系统的状态不可测或不易观测,测量结果可能受噪声干扰,必须采用观测器来进行状态变量估计^[1-3]。基于观测器的状态变量估计是振动主动控制技术应用于实际的关键,而观测变量个数往往少于状态变量个数,导致状态变量估计值出现较大误差。为了实现振动主动控制的目的,控制器设计需满足稳定性要求。目前,多数控制器设计利用 Lyapunov 稳定性原理来保证闭环系统的稳定性^[4-5]。此外,控制器设计还要满足一定的性能指标及约束条件。随着振动控制策略研究的深入,设计中往往存在多个约束条件,同时各个约束条件之间相互制约,因而线性矩阵不等式(LMI)得到了应用^[6-11]。但在实际的应用过程中,含多个未知参数的 LMI 求解存在缺陷,因此,笔者以文献[12]作为参考对基准建筑物进行控制器设计,并对由约束条件及性能指标构造的含 2 个未知参数的 LMI 求解做出改进。

1 控制器设计

建立状态方程如下:

收稿日期:2013-04-01

作者简介:王露健(1988—),女,江苏启东人,硕士研究生,主要从事振动控制研究。E-mail:wanglujian.11@163.com

通信作者:周星德,教授。E-mail:xingdezhou@hhu.edu.cn

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\ddot{\mathbf{x}}_g \quad (1)$$

式中: \mathbf{x}_p —— $2r \times 1$ 维状态矢量; t ——时间变量; \mathbf{A} —— $2r \times 2r$ 维矩阵; \mathbf{D} —— $2r \times g$ 维矩阵; \mathbf{u} ——作动器控制力向量; \mathbf{E} —— $2r \times 1$ 维矩阵; $\ddot{\mathbf{x}}_g$ ——地震波加速度。

以位移作为控制输出矢量:

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{H}\mathbf{x}_p(t) \quad (2)$$

式中: \mathbf{H} —— $q \times 2r$ 维输出矩阵(q 为控制输出的状态变量数目)。

采用 Kalman 滤波器进行状态变量估计, 设测量方程与控制输出方程一致, 最优估计如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_z = \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y}_z - \mathbf{H}\mathbf{x}_p) \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{y}_z = \mathbf{H}\mathbf{x}_z \quad \mathbf{L} = [\mathbf{H}\mathbf{S}]^T$$

式中: \mathbf{x}_z —— x_p 的估计值; \mathbf{S} ——Riccati 方程 $\mathbf{S}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{S} + \gamma_g\mathbf{E}\mathbf{E}^T = 0$ 的解。

由于地震波是未知的, 在进行控制器设计时采用不考虑地震外激励的模式。误差函数定义为

$$\mathbf{e}_p(t) = \mathbf{0} - \mathbf{x}_p(t) \quad \mathbf{e}_z(t) = \mathbf{x}_z(t) - \mathbf{x}_p(t) \quad (4)$$

其导数为

$$\dot{\mathbf{e}}_p(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}_p - \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad \dot{\mathbf{e}}_z(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{H})\mathbf{e}_z(t) \quad (5)$$

对照文献[12], 本文不存在参考模型, 故将控制力的表达式定义为

$$\mathbf{u} = \gamma\mathbf{D}^T\mathbf{P}\mathbf{x}_z \quad (6)$$

式中: γ ——正数; \mathbf{P} ——相应维数的正定矩阵。

为保证控制力作用下系统的稳定性, 构建 Lyapunov 函数

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{e}_p^T(t)\mathbf{P}\mathbf{e}_p + \mathbf{e}_z^T(t)\mathbf{P}\mathbf{e}_z \quad (7)$$

对其求导, 简记为如下二次型形式:

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = [\mathbf{e}_p^T(t)\mathbf{e}_z^T(t)]\mathbf{Q}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_p(t) \\ \mathbf{e}_z(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + 2\gamma\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{P} \\ -\gamma\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{P} & \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{H}) + (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{H})^T\mathbf{P} \end{bmatrix}$$

Basher^[12] 提出基于观测器的 LMI 控制方法, 要求矩阵 $\mathbf{Q} < 0$, 满足稳定性, 但未给出 \mathbf{P} 和 γ 的确定方法。同时确定 \mathbf{P} 和 γ 是很困难的, 此外, 考虑到 $\|\mathbf{P}\|$ 和 γ 的数量级问题, 本文提出如下优化模型:

$$\begin{cases} \min J = \frac{\gamma}{\|\mathbf{P}\|} \\ \mathbf{Q} < 0 \end{cases} \quad (9)$$

在求解策略方面, 提出通过给定 \mathbf{P} 来优化 γ 的方案; 为了保证 $\|\mathbf{P}\|$ 和 γ 数量级一致, 可以对角矩阵的方式给出初值 \mathbf{P} ; 笔者通过调试, 发现采用单位矩阵作为初值 \mathbf{P} 是一个较优的选择。具体求解过程如下:

(a) 令 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} 为相应维数的单位矩阵); (b) 通过式(9)进行优化计算, 确定目标函数 J ; (c) 利用式(6)确定控制力, 在进行仿真分析时, 笔者发现 $\mathbf{u} = \gamma\mathbf{D}^T\mathbf{P}\mathbf{x}_z$ 不能达到很好的控制效果, 进而根据实际控制要求来确定调节因子 β 。最终得到控制力的表达式为

$$\tilde{\mathbf{u}} = \alpha\mathbf{u} = \beta\gamma\mathbf{D}^T\mathbf{P}\mathbf{x}_z \quad (10)$$

2 实例分析

有关 3 层基准建筑物的详细定义、截面尺寸及节点划分可参阅文献[13]。

每个节点考虑水平、竖直和转动共 3 个自由度, 整个结构共计 60 个自由度, 去掉约束后还有 45 个自由度。在地震作用下的振动方程可表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{M}\mathbf{\Gamma}\ddot{\mathbf{x}}_g + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (11)$$

式中: \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} ——建筑物质量、阻尼和刚度矩阵, 均为 45×45 阶矩阵; $\mathbf{\Gamma}$ ——地震作用的位置矩阵; $\ddot{\mathbf{x}}_g$ ——地震波加速度; \mathbf{B} ——作动器定位矩阵, 为 $45 \times p$ 阶矩阵; \mathbf{u} —— $p \times 1$ 维控制力矢量(p 为作动器数目)^[14]。

为了验证本文方法的可行性, 对 3 层基准建筑物进行仿真。地震波采用 Kobe 波, 时间历程取为 50 s。楼层 1 布置 2 个相同的作动器, 楼层 2 和楼层 3 各布置 1 个作动器。控制输出楼层 2 和楼层 3 的位移。

由于3层基准建筑物的自由度数目比较多,本例中取前5阶模态进行降阶计算^[15-16]。前5阶自然频率为0.99 Hz、3.06 Hz、5.83 Hz、7.23 Hz、9.97 Hz。

式(1)的状态方程中 \mathbf{x}_p 为 10×1 维状态矢量, \mathbf{A} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 分别为 10×10 、 10×2 、 10×1 维矩阵。式(2)中 \mathbf{H} 为 2×10 维输出矩阵,其中 $\mathbf{H}(1,2)=1$, $\mathbf{H}(2,3)=1$,其余均为0。

通过求解器,得到Kalman滤波器的增益矩阵 \mathbf{L} ,从而得到所有状态变量的估计值。

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.5726 & -0.0131 & -0.0003 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3225 & 0.0543 & -0.0106 & 0.0151 & 0.0102 \\ 0.8702 & 0.0107 & 0.0001 & -0.0001 & -0.0000 & 0.3930 & 0.0752 & -0.0067 & 0.0211 & 0.0109 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

再通过优化模型(式(9))的求解,得到 $J=0.7$ 。然后经过反复调试,得到较优的调节因子 $\beta=10^{13}$,从而得到最终的控制律 α :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.1966 & -0.2569 & 0.1069 & -0.0005 & -0.0006 & 1.7914 & -0.6103 & 0.1892 & 0.0000 & -0.0005 \\ 0.2227 & -0.1223 & -0.0371 & 0.0002 & 0.0000 & 2.1501 & -0.2900 & -0.0776 & -0.0000 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (13)$$

最后给出控制前后楼层2和楼层3的位移响应及作动器控制力的时程曲线,见图1、图2。

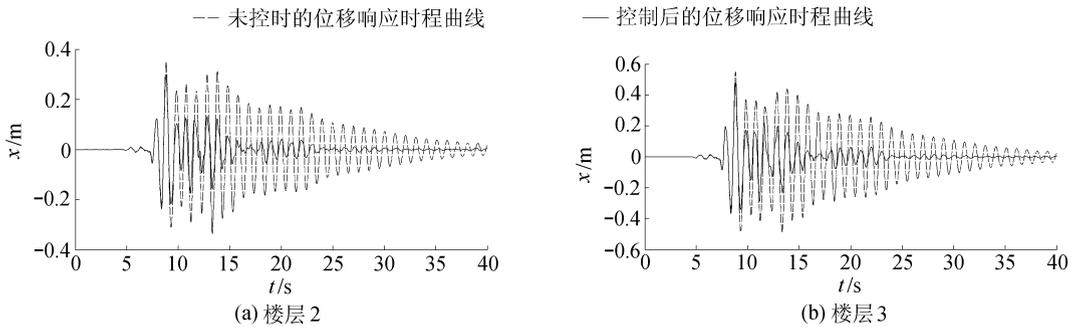


图1 控制前后的位移时程曲线

Fig. 1 Displacement time histories before and after control

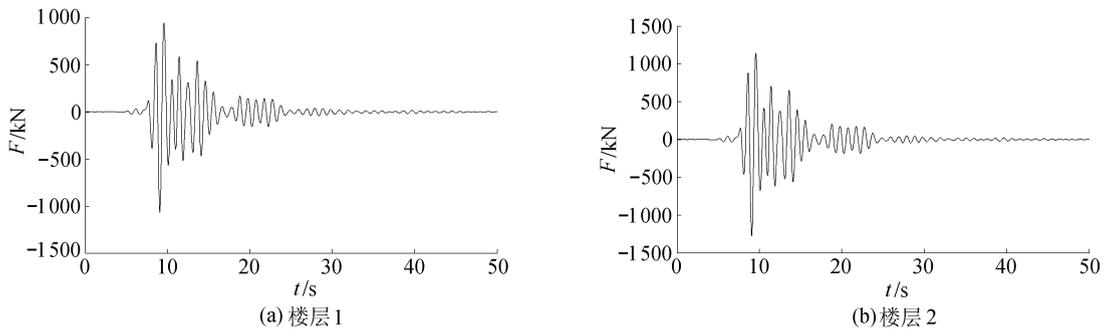


图2 作动器控制力时程曲线

Fig. 2 Control time histories of actuator

3 结 语

以3层基准建筑物为研究对象,在保证系统稳定并满足约束条件的限制下,建立了含有2个未知参数的线性矩阵不等式,通过对不等式求解,得到较优的性能指标,并在不断的调试下得到最终的控制律。从仿真结果看,本文方法具有较好的控制效果。

参考文献:

- [1] GONZALEZ R, FIACCHINI M, RODRIGUEZ F, et al. Adaptive control for a mobile robot under slip conditions using an LMI-based approach [J]. European Journal of Control, 2010, 16(2): 144-155.
- [2] KARIMI H R. Observer-based mixed H_2/H_∞ control design for linear systems with time-varying delays: an LMI approach [J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2008, 6(1): 1-14.

- [3] 韦俊青. 基于状态观测器的不确定性线性系统鲁棒控制研究 [D]. 广州:广东工业大学, 2013.
- [4] SATHANANTHAN S, KNAP M J, STRONG A, et al. Robust stability and stabilization of a class of nonlinear discrete time stochastic systems: an LMI approach[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(4): 1988-1997.
- [5] YANG Xikai. Observer-based anti-windup compensator design for saturated control systems using an LMI approach [J]. Computer & Mathematics with Applications, 2012, 64(5): 747-758.
- [6] ZHANG Qingjiang, YE Sijun. An enhanced LMI approach for mixed H-2/H-infinity flight tracking control[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2011, 24(3): 324-328.
- [7] ZHANG Kuanyu. Multi-objective control for stochastic model reference systems based on LMI approach and sliding mode control concept[J]. International Journal of Systems Science, 2013, 44(4): 739-749.
- [8] 李文章, 吴凌尧, 郭雷. 基于LMI的结构振动鲁棒H ∞ 控制[J]. 振动工程学报, 2008, 21(2): 157-161. (LI Wenzhang, WU Lingyao, GUO Lei. Robust H ∞ control of structural vibration based on LMI[J]. Journal of Vibration Engineering, 2008, 21(2): 157-161. (in Chinese))
- [9] KARIMI H R, GAO Huijun. LMI-based H-infinity synchronization of second-order neutral master-slave systems using delayed output feedback control[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2009, 7(3): 371-380.
- [10] BAI Mingchang. Robust control of uncertain time-delay systems via sliding mode control and LMI-H(infinity) technique[J]. Journal of Marine Science and Technology-Taiwan, 2008, 16(1): 1-7.
- [11] LIAN Changhua, YU Kewei. LMI optimization approach on robustness and H-infinity control analysis for observer-based control of uncertain systems[J]. Solitons & Fractals, 2008, 36(3): 617-627.
- [12] BASHER H A. An LMI approach for observer based model reference control [C]//IEEE SoutheastCon-Proceedings. Jacksonville, FL: IEEE Jacksonville Sect, 2013: 1-5.
- [13] OHTORI Y, CHRISTENSON R E, SPENCER B F, et al. Benchmark control problems for seismically excited nonlinear buildings [J]. Engineering Mechanics, 2004, 130(4): 366-385.
- [14] 周星德, 陈国荣. 3层基准建筑物地震激励多目标控制[J]. 振动工程学报, 2006, 19(3): 394-398. (ZHOU Xingde, CHEN Guorong. Multiobjective control for earthquak-excited 3-storey benchmark buildings [J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, 19(3): 394-398. (in Chinese))
- [15] 周星德, 姜冬菊. 结构振动主动控制[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [16] 蒋杨, 周星德, 王玉, 等. 基于分数阶的建筑物预测控制方法[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2011, 39(5): 556-560. (JIANG Yang, ZHOU Xingde, WANG Yu, et al. Predictive control method of building structure based on fractional order[J]. Journal of Hohai University: Natural Sciences, 2011, 39(5): 556-560. (in Chinese))