文章编号：1674-8085(2016)03-0009-05

退保因素下带有随机保费和分红的风险模型

*覃利华，闭盟华

（广西大学数学与信息科学学院，广西，南宁 530004）

摘　要：在经典风险模型基础上，考虑到退保事件的发生，讨论含退保因素下保费到达过程、理赔过程、支付红利过程及退保过程均为二项过程。运用鞅方法讨论了该模型盈余过程的性质，给出最终破产概率的表达式和 Lundberg 上界，并得到在保费额、理赔额、退保额、支付红利额均服从指数分布条件下的破产概率的具体表达式。

关键词：复合二项过程；退保；红利；破产概率；Lundberg 不等式

中图分类号：O211.6 **文献标识码**：A DOI:10.3969/j.issn.1674-8085.2016.03.003

RESEARCH ON THE MODEL OF RANDOMIZED DIVIDEND AND STOCHASTIC PREMIUM

* QIN Li-hua BI Meng-hua

(School of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004, China)

Abstract: According to the actual situation, a practical risk model with a refunding process is introduced. The arrival of the term policies, the occurrences of claim, refunding and dividend are compound binominal processes. We study the nature of this model by applying the martingale approach and get the Lundberg inequality and the formula of the ruin probability. We also give an explicit expression for the ruin probability with that the premium income, the claims, the occurrence of the refunding and the dividend, which are obey exponential distribution.

Key words: compound binomial risk model; refund; dividend;ruin probability;Lundberg inequality

复合二项风险模型通常有如下描述：

假设在任意一个时间区间(*k*-1,*k*],*k*=0,1,2,⋯中，仅可能出现两种情况，或有一次索赔发生，用$\xi_k=1$表示；或没有索赔发生，用$\xi_k=0$表示，并假设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$为独立同分布（$i.i.d$）的随机变量序列，且满足：

$$\Pr(\xi_k=1)=p,\Pr(\xi_k=0)=q,(0<P<1,p+q=1)$$

用X_n表示这个时间段内索赔额，它是仅取正整数值得随机变量，而到第 *n* 个时间单位末保险公司所支付的索赔总额S_n满足：

$$S_n=X_1\xi_1+X_2\xi_2+\cdots+X_n\xi_n,\forall n\geq 1，$$

当$n=0$时，$S_n=0$，再假定$X_1,X_2,\cdots$独立同分布（$i.i.d$）的随机变量序列，且与$\{\xi_n,n\geq 0\}$相互独立。为了维持保险业务的正常运作，假设保险公司在每个时间区的始端收取 1 个单位的保费，这样保险公司在时刻 *n* 的盈余$U(n)$可表述为：

$$U(n)=u+n-S_n,n=0,1,2,\cdots$$

其中$u=U(0)$为初始盈余，且假定 u 仅取非负整数。该模型首先是 Gerber [1]在 1984 年建立的，随后该模型被广发的进行了推广研究，得到了许多有价值的结论。近年来，Gerber 和 Shiu [2]在 1998 年引入了一个与破产时刻、破产赤字和破产前瞬间盈

收稿日期：2015-12-15；修改日期：2016-03-10

基金项目：国家自然科学基金项目(71462002)

作者简介：*覃利华(1990-)，女，壮族，广西来宾人，硕士生，主要从事随机过程在风险理论中的应用研究(E-mail:631898027@qq.com)

闭盟华(1984-)，男，广西南宁人，硕士生，主要从事随机过程在风险理论中的应用研究(E-mail: 1585041663@qq.com).

余有关的精算量，即期望折现罚金函数，随后此模型得到了许多比较完善的结果[3-6]。

在经典的风险模型中，往往忽略了退保、利率、通货膨胀率、干扰项及红利等因素对风险模型的影响。为此，于文广[7]提出了带有随机保费收入和随机支付红利的离散风险模型；方世组等[8]提出了带有随机支付红利的双险种复合二项模型；魏静等[9]研究了稀疏过程下退保相依多险种风险模型的破产概率；赵金娥等[10]研究了退保因素下保费收入为复合 Poisson 过程的风险模型；覃利华等[11]讨论了带有随机保费收入和随机支付红利的复合二项风险模型，得到了该模型满足的期望折现罚金函数、破产概率和破产赤字的分布函数等精算量。本文在前人的基础上，对文献[7,11]的模型进行推广，添加了退保过程，并且考虑保费到达过程、理赔过程、支付红利过程及退保过程均为二项过程，研究了盈余过程及调节系数 R 的性质，得到了破产概率的表达式和破产上界的 Lundberg 不等式。

1 模型及假设

定义 1 设 (Ω, F, P) 是完备的概率空间，则对 $u \geq 0, t \geq 0$，保险公司在 t 时刻的盈余为：

$$U(t)=u+\sum_{k=1}^{M(t)} Y_k-\sum_{k=1}^{N_1(t)} X_k-\sum_{k=1}^{N_2(t)} Z_k-\sum_{k=1}^{N_3(t)} I_k \tag{1}$$

其中：

1）u 为保险公司的初始资本；$\{M(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_i(t), t \geq 0, i=1,2,3\}$ 分别表示在时间区间 $(t-1, t]$ 内保险公司收到的保单数、发生的理赔次数、退保的保单数和支付红利的保单数；X_k 表示第 k 次的索赔额；Y_k 表示第 k 张保单收取的保费；Z_k 表示第 k 张退保保单的给付额；I_k 表示第 k 次支付的红利额，且当盈余大于或等于给定的非负整数红利界时，保险公司才支付红利。本文假设保险公司收取保费、进行赔付、退保及支付红利均在时间区间 $(t-1, t]$ 的始端进行。

2）$\{M(t)\}_{t \geq 0}$ 服从参数为 p_1 的二项随机序列，$\{Y_k\}_{k \geq 0}$ 是独立同分布且取正整数值的随机变量。假设保险公司在时间区间 $(t-1, t]$ 内收到保费的概率为 p_1，且 $p_1 \in(0,1)$，在时间区间 $(t-1, t]$ 内没有收到保费的概率为 q_1，$q_1=1-p_1$，用 Y 来泛指任何一个 Y_k，且记 $E[Y]=\mu_1$。

3）$\{N_1(t)\}_{t \geq 0}$ 服从参数为 p_2 的二项随机序列，$\{X_k\}_{k \geq 0}$ 是独立同分布且取正整数值的随机变量。假设保险公司在时间区间 $(t-1, t]$ 内发生索赔的概率为 p_2，且 $p_2 \in(0,1)$，在时间区间 $(t-1, t]$ 内没有发生索赔的概率为 q_2，$q_2=1-p_2$，用 X 来泛指任何一个 X_k，记 $E[X]=\mu_2$。

4）$\{N_2(t)\}_{t \geq 0}$ 服从参数为 p_3 的二项随机序列，$\{Z_k\}_{k \geq 0}$ 是独立同分布且取正整数值的随机变量。假设保险公司在时间区间 $(t-1, t]$ 内发生退费的概率为 p_3，且 $p_3 \in(0,1)$，在时间区间 $(t-1, t]$ 内没有发生退费的概率为 q_3，$q_3=1-p_3$，用 Z 来泛指任何一个 Z_k，记 $E[Z]=\mu_3$。

5）$\{N_3(t)\}_{t \geq 0}$ 服从参数为 p_4 的二项随机序列，$\{I_k\}_{k \geq 0}$ 是独立同分布且取正整数值的随机变量。假设保险公司在时间区间 $(t-1, t]$ 内要支付红利的概率为 p_4，且 $p_4 \in(0,1)$，在时间区间 $(t-1, t]$ 内没有支付红利的概率为 q_4，$q_4=1-p_4$，用 I 来泛指任何一个 I_k，记 $E[I]=\mu_4$。

假设 $\{X_k, k \geq 0\},\{Y_k, k \geq 0\},\{Z_k, k \geq 0\}$，$\{I_k, k \geq 0\},\{M(t), t \geq 0\},\{N_1(t), t \geq 0\},\{N_2(t), t \geq 0\}$，$\{N_3(t), t \geq 0\}$ 之间是相互独立的。记盈利为：

$$S(t)=\sum_{k=1}^{M(t)} Y_k-\sum_{k=1}^{N_1(t)} X_k-\sum_{k=1}^{N_2(t)} Z_k-\sum_{k=1}^{N_3(t)} I_k \tag{2}$$

为了保证公司的正常运行，须要求 $E[S(t)]>0$，即 $p_1 \mu_1-p_2 \mu_2-p_3 \mu_3-p_4 \mu_4>0$，在此定义相对安全负荷系数

$$\theta=\frac{p_1 \mu_1}{p_2 \mu_2+p_3 \mu_3+p_4 \mu_4}-1>0$$

定义 2 破产时刻为：

$T=\inf\{t:t\ge 0,U(t)<0\},(\inf\phi=\infty)$

定义 3 破产概率为：

$\psi(u)=\Pr(T<\infty|U(0)=u)$

2 相关引理

引理 1[10] 盈利过程$\{S(t),t\ge 0\}$有如下的性质

1) 具有平稳独立增量；

2) $E[S(t)]=(p_1\mu_1-p_2\mu_2-p_3\mu_3-p_4\mu_4)t>0$；

3) 存在正数r，使得$E[e^{-rS(t)}]<\infty$。

引理 2 当$E[S(t)]\ge 0$时，$\lim\limits_{t\to\infty}U(t)=\infty.a.s$。

证明 根据强大数定理知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{u}{t}+\lim_{t\to\infty}[\frac{\sum_{k=1}^{M(t)}Y_k}{M(t)}\cdot\frac{M(t)}{t}]-\lim_{t\to\infty}[\frac{\sum_{k=1}^{N_1(t)}X_k}{N_1(t)}\cdot\frac{N_1(t)}{t}]-\lim_{t\to\infty}[\frac{\sum_{k=1}^{N_2(t)}Z_k}{N_2(t)}\cdot\frac{N_2(t)}{t}]-\lim_{t\to\infty}[\frac{\sum_{k=1}^{N_3(t)}I_k}{N_3(t)}\cdot\frac{N_3(t)}{t}]=p_1\mu_1-p_2\mu_2-p_3\mu_3-p_4\mu_4>0 \tag{3}$$

所以，$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}>0.a.s$，即$\lim\limits_{t\to\infty}U(t)=\infty.a.s$。

引理 3 对于盈利过程$\{S(t),t\ge 0\}$，存在一个函数$g(r)$，使得$E[e^{-rS(t)}]=e^{g(r)t}$，其中

$$g(r)=\mathrm{In}[p_1M_Y(-r)+q_1]+\mathrm{In}[p_2M_X(r)+q_2]+\mathrm{In}[p_3M_Z(r)+q_3]+\mathrm{In}[p_4M_I(r)+q_4]$$

证明

$$E[e^{-rS(t)}]=E[\exp\{-r(\sum_{k=1}^{M(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N_1(t)}X_k-\sum_{k=1}^{N_2(t)}Z_k-\sum_{k=1}^{N_3(t)}I_k)\}]=E[\exp\{-r\sum_{k=1}^{M(t)}Y_k\}]\cdot E[\exp\{r\sum_{k=1}^{N_1(t)}X_k\}]\cdot E[\exp\{r\sum_{k=1}^{N_2(t)}Z_k\}]\cdot E[\exp\{r\sum_{k=1}^{N_3(t)}I_k\}]=\exp t\{\mathrm{In}[p_1M_Y(-r)+q_1]+\mathrm{In}[p_2M_X(r)+q_2]+\mathrm{In}[p_3M_Z(r)+q_3]+\mathrm{In}[p_4M_I(r)+q_4]\}$$

令

$$g(r)=\mathrm{In}[p_1M_Y(-r)+q_1]+\mathrm{In}[p_2M_X(r)+q_2]+\mathrm{In}[p_3M_Z(r)+q_3]+\mathrm{In}[p_4M_I(r)+q_4] \tag{4}$$

则$E[e^{-rS(t)}]=e^{g(r)t}$。

引理 4 方程$g(r)=0$存在唯一正解R，且称之为调节系数。

证明 根据引理 3，对$g(r)$求导得

$$g^{'}(r)=\frac{-p_1E[Ye^{-rY}]}{p_1M_Y(-r)+q_1}+\frac{p_2E[Xe^{rX}]}{p_2M_X(r)+q_2}+\frac{p_3E[Ze^{rZ}]}{p_3M_Z(r)+q_3}+\frac{p_4E[Ie^{rI}]}{p_4M_I(r)+q_4} \tag{5}$$

对$g(r)$两次求导得

$$g^{''}(r)=\frac{p_1E[Y^2e^{-rY}]\cdot[p_1M_Y(-r)+q_1]-p_1^2(E[Ye^{-rY}])^2}{[p_1M_Y(-r)+q_1]^2}+\frac{p_2E[X^2e^{rX}]\cdot[p_2M_X(r)+q_2]-p_2^2(E[Xe^{rX}])^2}{[p_2M_X(r)+q_2]^2}+\frac{p_3E[Z^2e^{rZ}]\cdot[p_3M_Z(r)+q_3]-p_3^2(E[Ze^{rZ}])^2}{[p_3M_Z(r)+q_3]^2}+\frac{p_4E[I^2e^{rI}]\cdot[p_4M_I(r)+q_4]-p_4^2(E[Ie^{rI}])^2}{[p_4M_I(r)+q_4]^2} \tag{6}$$

将$r=0$代入（5）和（6）式分别得到

$$g^{'}(0)=-p_1\mu_1+p_2\mu_2+p_3\mu_3+p_4\mu_4<0$$

$$g^{''}(0)=p_1E[Y^2]-p_1^2(E[Y])^2+p_2E[X^2]-p_2^2(E[X])^2+p_3E[Z^2]-p_3^2(E[Z])^2+p_4E[I^2]-p_4^2(E[I])^2=p_1Var(Y)+p_1q_1(E[Y])^2+p_2Var(X)+p_2q_2(E[X])^2+p_3Var(Z)+p_3q_3(E[Z])^2+p_4Var(I)+p_4q_4(E[I])^2>0$$

所以，曲线$g(r)$在$r>0$时为严格单调下凸函数，又因为$\lim\limits_{r\to\infty}g(r)=+\infty,g(0)=0$，于是存在唯一的 R，使得 $g(R)=0$，称 R 为调节系数。

3 主要结论

定义 4 对于盈利过程$\{S(t),t\ge 0\}$，定义事件流：$\xi^s=\{\xi_t^s,t\ge 0\}$，其中$\xi_t^s=\sigma\{S(t^{'}),t^{'}\le t\}$。

定理 1 令 $M_u(t)=\frac{\exp[-r(u+S(t))]}{\exp[tg(r)]}$，则$\{M_v(t),\xi_t^s,t\ge 0\}$是鞅。

证明 对$\forall v \le t$，有

$$E[M_u(t)\big|\xi_v^s]=E[\frac{\exp[-r(u+S(t))]}{\exp[tg(r)]}\big|\xi_v^s]=$$

$$E[\frac{\exp(-r(u+S(v))}{\exp(vg(r))}\cdot\frac{\exp[-r(S(t)-S(v))]}{\exp((t-v)g(r))}\big|\xi_v^s]=$$

$$M_u(v)\cdot E[\frac{\exp[-r(S(t)-S(v))]}{\exp((t-v)g(r))}\big|\xi_v^s]=M_u(v)$$

所以，$\{M_u(t),\xi_v^s,t\ge 0\}$是鞅。

引理 5[12] T 是ξ^s停时。

定理 2 风险模型（1）的最终破产概率满足 Lundberg 不等式：

$$\psi(u)\le e^{-Ru}$$

其中，$R=\sup\{r:g(r)\le 0\}$。

证明 因为 T 是ξ^s停时，选取$t_0\le\infty$，易知$t_0\Lambda T$是ξ^s停时，由引理 5 及停时定理，有

$$\begin{aligned}&e^{-ru}=M_v(0)=E[M_v(t_0\Lambda T)]=E[M_v(t_0\Lambda T)\big|T\le t_0]\cdot\\&\quad\Pr\{T\le t_0\}+E[M_v(t_0\Lambda T)\big|T>t_0]\Pr\{T>t_0\}\ge\\&E[M_v(t_0\Lambda T)\big|T\le t_0]\Pr\{T\le t_0\}=\\&E[M_u(T)\big|T\le t_0]\Pr\{T\le t_0\}\end{aligned}\tag{7}$$

因为当$T<\infty$时，有$u+S(t)\le 0$，故

$$\begin{aligned}&\Pr\{T\le t_0\}\le\frac{e^{-ru}}{E[M_u(T)\big|T\le t_0]}\le\\&\frac{e^{-ru}}{E[e^{-Tg(r)}\big|T\le t_0]}\le e^{-ru}\sup_{0\le t\le t_0}e^{tg(r)}\end{aligned}\tag{8}$$

在(8)式两端令$t_0\to\infty$，有$\psi(u)\le e^{-ru}\sup\limits_{t\ge 0}e^{tg(r)}$，取$R=\sup\limits_{r>0}\{r:g(r)\le 0\}$，即结论得证。

定理 3 风险模型（1）的最终破产概率为：

$$\psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}\big|T<\infty]}$$

其中 R 为调节系数。

证明 在（7）式中取$r=R$得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-Ru}&=E[e^{-RU(T)}\big|T\le t_0]\Pr\{T\le t_0\}+\\&E[e^{-RU(t_0)}\big|T>t_0]\Pr\{T>t_0\}\end{aligned}\tag{9}$$

以$I(A)$表示集合A的示性函数，则

$$\begin{aligned}&0\le E[e^{-RU(t_0)}\big|T>t_0]\Pr\{T>t_0\}=\\&E[e^{-RU(t_0)}I\{T>t_0\}]\le E[e^{-RU(t_0)}I\{U(t_0)\ge 0\}]\end{aligned}$$

由于$0\le e^{-RU(t_0)}I\{U(t_0)\ge 0\}\le 1$，根据强大数定理可证：当$t_0\to\infty$时，$U(t_0)\to\infty$ .a.s。故由控制收敛定理知

$$\lim_{t_0\to\infty}E[e^{-RU(t_0)}\big|T>t_0]\Pr\{T>t_0\}=0.a.s$$

于是在（9）式两端令$t_0\to\infty$，则结论得证。

推论 在模型(1)的假设下，设保费额Y_k，理赔额X_k，退保额Z_k,支付红利额I_k分别服从参数为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的指数分布，则破产概率的表达式为$\psi(u)=\alpha_2{}^{-1}(\alpha_2-R)e^{-Ru}$。

证明 根据矩母函数定义，有

$$\begin{aligned}&M_Y(-r)=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+r},M_X(r)=\frac{\alpha_2}{\alpha_2-r},\\&M_Z(r)=\frac{\alpha_3}{\alpha_3-r},\ M_I(r)=\frac{\alpha_4}{\alpha_4-r}\end{aligned}\tag{10}$$

把（10）式代入$g(r)=0$得

$$\begin{aligned}&\mathrm{In}(p_1\frac{\alpha_1}{\alpha_1+r}+q_1)+\mathrm{In}(p_2\frac{\alpha_2}{\alpha_2-r}+q_2)+\\&\mathrm{In}(p_3\frac{\alpha_3}{\alpha_3-r}+q_3)+\mathrm{In}(p_4\frac{\alpha_4}{\alpha_4-r}+q_4)=0\end{aligned}\tag{11}$$

则 R 为该方程（11）的解。假设破产在$T=t$时刻发生，令$\hat{\mu}$表示在T时刻即将发生理赔前的盈余。若$-U(t)>\zeta$，则最后一次理赔额要大于$\hat{\mu}+y$，故在理赔额大于$\hat{\mu}$时的条件概率为：

$$\begin{aligned}&P(-U(t)>y\big|T<\infty)=P(Y>\hat{\mu}+\ \ \zeta\big|Y>\hat{\mu})=\\&P(Y>\hat{\mu}+\zeta)\ P(Y>\hat{\mu})=e^{-\alpha_2 y}\end{aligned}$$

所以$-U(t)(T<\infty)$得密度函数为：

$$E[e^{-RU(T)}\Big|T<\infty]=b\int_0^\infty e^{Ry}e^{-\alpha_2 y}\,\mathrm{d}y=\frac{\alpha_2}{\alpha_2-R}\tag{12}$$

把（12）式代入定理 3 的结论得

$$\psi(u)=\alpha_2^{-1}(\alpha_2-R)e^{-Ru}$$

结合（11）式可得推论破产概率的具体数值。

参考文献:

[1] Gerber H U. Mathematical fun with the compound

binomial process[J]. Astin Bulletin, 1988, 18(2): 161-168.

[2] Gerber H U, Shiu E S W. On the time value of ruin[J]. North American Actuarial Journal, 1998, 2(1): 48-72.

[3] 成世学. 破产论研究综述[J].数学的进展,2002, 31(5): 403-422.

[4] 龚日朝,皱捷中. 复合二项风险模型下 Gerber-shiu 折现罚金函数的渐近解[J].系统科学与数学,2007,27(4): 573-586.

[5] Bao Z H.The expected discounted penalty at ruin in the risk process with random income[J].Applied mathematics and computation,2006,179(2):559-566.

[6] Bao Z H. A note on the compound binomial model with randomized dividend strategy[J].Applied Mathematics and Compution,2007,19(4):276-286.

[7] Yu W. Randomized dividends in a discrete insurance risk model with stochastic premium income[C]. Mathematical Problems in Engineering,2013ID579534:1-9.

[8] 方世祖,文厚明,刘果. 带随机红利的双险种复合二项模型[J]. 井冈山大学学报：自然科学版,2011,32(3): 13-17.

[9] 魏静,葛世刚,刘海生. 稀疏过程下退保相依多险种风险模型的破产概率[J].中山大学学报:自然科学版,2015, 54(4):72-74.

[10] 赵金娥,轩素梅,穆凤. 退保因素下保费收入为复合 Poisson 过程的风险模型[J].西南大学学报:自然科学版,2009,31(7):53-57.

[11] 覃利华,闭盟华. 带有随机保费收入和随机分红的复合二项风险模型[J].广西师范学院:自然科学版,2015, 32(4):22-29.

[12] 袁德美. 一类暂留合 Poisson 过程的相伴将来最小过程的极限性质[J].西南师范大学学报:自然科学版,1998, 23(6):623-628.